装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学
20xx－20xx 学年第一学期期末考试试卷

开课院系： 物理学院 科目：理论力学A 考试形式： 闭 卷

学生所在系：________ 姓名： 样 卷 学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

注意事项：在试卷留空处答题。写不下时，请在试卷反面接着答题。不交草稿纸。

可能用到的一些公式：

刚体的欧拉动力学方程

$$I_1\dot\omega_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=M_1$$
$$I_2\dot\omega_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=M_2$$
$$I_3\dot\omega_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=M_3$$

欧拉运动学方程

$$\omega_1=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi$$
$$\omega_2=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi$$
$$\omega_3=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi$$

球坐标系中的速度分解：$\dot{\vec r}=\dot r\vec e_r+r\dot\theta\vec e_\theta+r\sin\theta\,\dot\varphi\vec e_\varphi$

电磁场中运动的带电粒子的拉格朗日函数：$L=\frac{1}{2}mv^2-e(\phi-\vec v\cdot\vec A)$

正则变换生成函数的四种常用形式

$$F_1=F_1(q,Q,t),\quad p_\alpha=\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha},\quad P_\alpha=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha},\quad H'=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$$
$$F_2=F_2(q,P,t),\quad p_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha},\quad Q_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha},\quad H'=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$$
$$F_3=F_3(p,Q,t),\quad q_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha},\quad P_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha},\quad H'=H+\frac{\partial F_3}{\partial t}$$
$$F_4=F_4(p,P,t),\quad q_\alpha=-\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha},\quad Q_\alpha=\frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha},\quad H'=H+\frac{\partial F_4}{\partial t}$$

一、 （20 分）位于坐标原点具有磁荷 b 的磁单极子产生磁场，其矢势在球坐标系(r,θ,φ)中可以表示为

$$\vec A=\frac{b(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\vec e_\varphi$$

其中$\vec e_\varphi$为方位角的单位矢量。考虑一个电荷为e、质量为m的粒子在该磁场中的运动。

1. 写出球坐标系中该带电粒子的拉格朗日函数表达式，并找出至少两个独立的运动积分。
2. 在直角坐标系(x,y,z)中写下相应的哈密顿函数 H 以及关于第三个自由度(z,p_z)的哈密顿正则方程。

二、 （20 分）质量为m的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称重陀螺，三个主转动惯量为$I_1=I_2\neq I_3$，质心到固定点的距离为l。

1. 选取三个欧拉角作为广义坐标，写出哈密顿函数$H(\phi,\theta,\psi,p_\varphi,p_\theta,p_\psi)$。
2. 利用哈密顿-雅可比方程，求哈密度主函数$S(t,\phi,\theta,\psi)$。（可保留积分形式，无需求积）

装订线 答题时不要超过此线

三、 （20 分）以向下为x-轴的正方向，讨论落体运动。

1. 设初始时刻的位移为$x(t=0)=x_0$，动量为$p(t=0)=p_0$，证明

$$x(t),p(t)\to x_0,p_0$$

是正则变换。

2. 对此变换逐个判断四种常用生成函数是否存在；若存在，则求出各生成函数表达式和哈密顿函数$K(t,x_0,p_0)$。

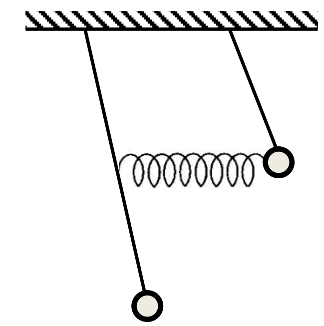
3. 分别求出初值x_0,p_0这两个守恒量所对应的(准)对称变换。

四、 （10 分）用弹性势能为

$$mgl(\theta_1-\theta_2)^2$$

的轻弹簧连接两个平面单摆。单摆的刚性杆长度分别为$2l,l$;质点质量分别为m,m;与垂直方向夹角为θ_1,θ_2。

1. 写出微振动拉氏量。
2. 求模态矩阵和自然频率。



装订线 答题时不要超过此线

五、　（15 分）取平面直角坐标系，以水平为x轴，向下为y轴。利用相空间的莫培督原理求抛物问题的相轨道。

六、（15 分）自然长度为l、弹性系数为k的轻弹簧，两端连结质量分别为m_1和m_2的质点，整个系统放置在光滑桌面上运动。

1. 写出系统的拉格朗日函数。
2. 找出足够多的循环坐标，用劳斯变换降阶，求出径向运动的一维等效拉氏量。
3. 求一维等效运动的平衡点和微振动频率。