数理方程 · 历年真题集

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学数理方程 (A/B) 考试试题，对扫描质量较差的黑心书店版本试卷内容进行 LaTeX 科技排版，方便读者阅读使用.
2. 按照考试时间先后排序，其次为 A、B 卷. 修读数理方程 B 的同学可以完成大部分数理方程 A 的试题.
3. 本试题集的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.
4. 参考答案仅给出结果，不保证正确性，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课针对一些易错题集中讲解.
5. 不同试卷的参考公式不一，教学组没有明确考试会给哪些公式，读者备考时尽量多记诵一些以防万一.
6. 不同读者的复习备考方法不尽相同，敬请读者根据自己的需求使用本试题集.
7. 感谢鄢雯哲助教核对试卷！感谢吴天助教的指导！预祝读者在期末考试取得满意的成绩！

2019-2020 春季学期 数理方程 B 助教

本科 17 级 少年班学院 少年班 杨光灿烂

2020 年 6 月 于上海

试卷投稿、纠错、意见反馈欢迎联系我: sunny020303@163.com

再版说明

1. 数理方程历年真题集断更五年后重磅回归！首先感谢杨学长先前对此真题集的奠基工作，并向我提供`.tex` 源代码；
2. 本版对文档结构进行了重排，并统一修正了数学格式，添加了目录；
3. 本版添加了 2020-2021、2023-2024、2024-2025 年数理方程 A 试题，供同学们参考，同时删除了 2010 年以前的试题，题目在精不在多；
4. 在这里推荐一个应跃洲（23 级少物）同学邀请我共同编写的项目，希望能对考前速通的同学们提供些许帮助，少受数理方程这门课程的折磨. 项目地址：数理方程 A 速通指南.

23 级 物理学院 于洪飞

2025 年 6 月 于合肥

试卷纠错、意见反馈欢迎联系我: yuhongfei@mail.ustc.edu.cn

我的 GitHub ： Phiyu　个人主页：Hongfei Yu

最后修改日期: 2026 年 1 月 11 日

目录

数理方程 A 参考公式

1. 直角坐标系：

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

柱坐标系：

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

球坐标系：

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

2. Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为：

$$N_{2n}^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2(\omega_{2n}a), \qquad N_{1n}^2 = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a), \qquad N_{3n}^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2(\omega_{3n}a)$$

Bessel 函数的递推公式：

$$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}, \qquad (x^{-\nu}J_\nu)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}, \quad 2\nu J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}, \qquad 2xJ_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$$

3. n 阶 Legendre 多项式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

递推公式：

1. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ 2. $nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0$
3. $nP_{n-1}(x) - P_{n-1}'(x) + xP_n'(x) = 0$ 4. $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$

4.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda z \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{z^2}{4a^2 t}\right)$$

5. 由 Poisson 方程第一边值问题的格林函数 $G(M;M_0)$，求相应问题解 $u(M)$ 的公式：

空间区域：

$$u(M) = \iiint_D f(M_0)G(M;M_0)\,\mathrm{d}M_0 - \iint_S \varphi(M_0)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n_0}\,\mathrm{d}S_0$$

平面区域：

$$u(M) = \iint_D f(M_0)G(M;M_0)\,\mathrm{d}\sigma_0 - \int_l \varphi(M_0)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n_0}\,\mathrm{d}l_0$$

2014-2015 学年第二学期数理方程 A 期末试题

一.

1. $\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0,(a\neq b)$, 它为双曲型方程.

2. 代换 $\xi=y+ax,\eta=y+bx$.

3. $u(x,y)=f(y+ax)+g(y+bx),\ f,g\in C^2(\mathcal{R})$.

4. $u(x,y)=\psi(\dfrac{y+ax}{a-b})+\varphi(\dfrac{y+bx}{b-a})-\varphi(0)$.

二.

1. 特征线方程:$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{2x}$, 解得特征线 $y=x^2+c,\ c\in R$.

2. $u(x,y)=x^4-\dfrac{2}{3}x^3+xy-2x^2y+y^2+1$.

三.

1. $u_1(t,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos 2nt+B_n\sin 2nt)\sin nxdx$,
   其中 $A_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,\ B_n=\dfrac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nxdx$.

2. $u_2(t,x)=\dfrac{1}{16-\omega^2}(\sin\omega t-\dfrac{\omega}{4}\sin 4t)\sin 2x$,
   $\displaystyle\lim_{\omega\to 4}u_2(t,x,\omega)=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4t-t\cos 4t)\sin 2x$.

四.

1. $u(r,z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cosh\omega_{1n}z+B_n\sinh\omega_{1n}zJ_0(\omega_{1n}r)$,
   $A_n=0,\ B_n=\dfrac{2\int_0^a f(r)J_0(\omega_{1n}r)rdr}{a^2\sinh\omega_1nhJ_1^2(\omega_{1n}a)}$.

2. $\begin{cases}\Theta''+\mu^2\Theta=0,\ (0\le\theta\le 2\pi),\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta),\end{cases}$ 和 $\begin{cases}R''+\dfrac{1}{r}R'+(\lambda-\dfrac{\mu^2}{r^2})R=0,\\ |R(0)|<+\infty,\ R(a)=0.\end{cases}$

五.

1. $U(t,x,y,z)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^3e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}+3t}$.

2. $u(t,x,y,z)=\dfrac{1}{(1+4t)^{\frac{2}{3}}}e^{3t-\frac{1}{1+4t}(x^2+y^2+z^2)}$.

六.

1. $G=\dfrac{1}{4\pi}\ln\dfrac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

2. $u(x,y)=\dfrac{5x}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^2+25x^2}\right)d\eta$.

七. $Z(\theta)=P_4(\cos\theta),\ Z(\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{8}$ // (updating)

2020-2021 学年第二学期数理方程 A 期末试题

一 (13 分) 求以下固有值问题的固有函数：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, \quad y(24) = 0. \end{cases}$$

二 (12 分) 求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 31 + \cos 2x, \quad u_y(x,0) = 0. \end{cases}$$

三 (12 分) 求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x + yu_y - u = xy, \\ u\big|_{t=0} = \cos(2x+y). \end{cases}$$

四 (13 分) 求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + \delta(t-3)\delta(x-1), \quad (t > 0,\, 0 < x < 5), \\ u(t,0) = u(t,5) = 0, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{3x}, \quad u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

五 (12 分) 求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r < 1,\, 0 < z < 6), \\ |u(0,z)| < +\infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 1 - r^2, \quad u\big|_{z=6} = 0. \end{cases}$$

六 (13 分) (r,θ,φ) 为球坐标，求解定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad \left(r < 1,\, 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2},\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right), \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin^2\theta\cos\theta, \\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

七 (13 分) 求解初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 3u_x - 9u - \mathrm{e}^{-2x}, \quad (t > 0,\ -\infty < x < +\infty), \\ u\big|_{t=0} = x^2. \end{cases}$$

八 (12 分) 已知区域 V $\{(x, y, z) | x + y > z\}$, 求 V 内 Poisson 方程第一边值问题的格林函数. 并求解边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (x, y, z) \in V, \\ u = \varphi(x, y), \quad \text{when } x + y = z. \end{cases}$$

参考公式

见真题集开头.

2023-2024 学年第二学期数理方程 A 期末试题

一 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 31 + \cos 2x, \quad u_y(x,0) = 0. \end{cases}$$

二 (13 分) 求以下固有值问题的固有函数:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, \quad y(24) = 0. \end{cases}$$

三 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x + yu_y - u = xy, \\ u\big|_{t=0} = \cos(2x+y). \end{cases}$$

四 (13 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + \delta(t-3)\delta(x-1), \quad (t>0,\, 0<x<5), \\ u(t,0) = u(t,5) = 0, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{3x}, \quad u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

五 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r<1,\, 0<z<6), \\ |u(0,z)| < +\infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 1 - r^2, \quad u\big|_{z=6} = 0. \end{cases}$$

六 (13 分) (r,θ,φ) 为球坐标，求解定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad \left(r<1,\, 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2},\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right), \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin^2\theta\cos\theta, \\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

七 (13 分) 求解初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 3u_x - 9u - \mathrm{e}^{-2x}, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ u\big|_{t=0} = x^2. \end{cases}$$

八 (12 分) 已知区域 V $\{(x, y, z)|x + y > z\}$，求 V 内 Poisson 方程第一边值问题的格林函数. 并求解边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (x, y, z) \in V, \\ u = \varphi(x, y), \quad \text{when } x + y = z. \end{cases}$$

参考公式

见真题集开头.

2024-2025 学年第二学期数理方程 A 期末试题

一 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 31 + \cos 2x, \quad u_y(x,0) = 0. \end{cases}$$

二 (13 分) 求以下固有值问题的固有函数:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, \quad y(24) = 0. \end{cases}$$

三 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x + yu_y - u = xy, \\ u\big|_{t=0} = \cos(2x+y). \end{cases}$$

四 (13 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + \delta(t-3)\delta(x-1), \quad (t>0,\, 0<x<5), \\ u(t,0) = u(t,5) = 0, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{3x}, \quad u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

五 (12 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r<1,\, 0<z<6), \\ |u(0,z)| < +\infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 1 - r^2, \quad u\big|_{z=6} = 0. \end{cases}$$

六 (13 分) (r,θ,φ) 为球坐标，求解定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad \left(r<1,\, 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2},\, 0\leqslant\varphi<2\pi\right), \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin^2\theta\cos\theta, \\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

七 (13 分) 求解初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 3u_x - 9u - \mathrm{e}^{-2x}, \quad (t > 0,\, -\infty < x < +\infty), \\ u\big|_{t=0} = x^2. \end{cases}$$

八 (12 分) 已知区域 $V\ \{(x, y, z) | x + y > z\}$, 求 V 内 Poisson 方程第一边值问题的格林函数. 并求解边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (x, y, z) \in V, \\ u = \varphi(x, y), \quad \text{when } x + y = z. \end{cases}$$

参考公式

见真题集开头.

2013-2014 学年第二学期数理方程 B 期末试题

一. (16 分) 求下列偏微分方程的通解 $u = u(x, y)$:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y.$

2. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = xy.$

二. (10 分) 求下列固有值问题的解, 要求明确指出固有值及其所对应的固有函数:

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda x^2 y = 0,\ (0 < x < 2), \\ |y(0)| < +\infty,\ y'(2) = 0. \end{cases}$$

三. (12 分) 求第一象限 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ 的第一边值问题的 Green 函数.

四. (12 分) 用积分变换法求解下列方程:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + u,\ (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

五. (15 分) 用分离变量法求解下列方程:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ (r < 2), \\ u|_{r=2} = \sin\theta + 2\sin 5\theta - 7\cos 4\theta. \end{cases}$$

六. (15 分) 用分离变量法求解下列方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ (0 < x < 1, t > 0), \\ u(t, 0) = 0,\ u(t, 1) = 1, \\ u(0, x) = \varphi(x) + x,\ u_t(0, x) = \delta(x - \dfrac{1}{2}). \end{cases}$$

七. (15 分) 用分离变量法求解下列方程:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = z,\ (x^2 + y^2 + z^2 < 1), \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0 \end{cases}$$

八. (5 分) 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt} + 2u_t + u,\ (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(0, x) = 2\cos x,\ u_t(0, x) = 2x. \end{cases}$$

提示: 先对泛定方程进行变换成为一个较为简单的泛定方程, 再根据初始条件进行求解.

参考公式

见真题集开头.

2015-2016 学年第二学期数理方程 B 期末试题

一. (12 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数:

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0,\ (0 < x < 16), \\ Y'(0) = 0,\ Y'(16) = 0. \end{cases}$$

二. (16 分) 利用分离变量法求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t = 4u_x x,\ (t > 0, 0 < x < 5), \\ u(t,0) = u(t,5) = 0, \\ u(0,x) = \phi(x). \end{cases}$$

并求 $\phi(x) = \delta(x-2)$ 时此定解问题的解.

三. (14 分) 考虑初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + f(t,x),\ (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = \sin 2x. \end{cases}$$

1. 如取 $f(t,x) = 0$, 求此初值问题的解.
2. 如取 $f(t,x) = t^2x^2$, 求此初值问题相应的解.

四. (14 分) 求解以下初值问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 5u,\ (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ u|_{t=0} = \phi(x). \end{cases}$$

并指出当 $\phi(x) = e^{-x^2}$ 时此定解问题的解.

五. (16 分) 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r,\ (0 < r < 1), \\ |u(t,0)| < +\infty,\ u(t,1) = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(r). \end{cases}$$

并算出 $\phi(r) = J_0(ar) + 3J_0(br)$ 时的解, 其中 $0 < a < b$, 且 $J_0(a) = J_0(b) = 0$.

六. (14 分) 已知下半空间 $V=\{(x,y,z)|x<0,-\infty<x,y<+\infty)\}$.

1. 求出 V 内泊松方程第一边值问题的 Green 函数.

2. 求解定解问题:

$$\begin{cases}4u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ (z<0,-\infty<y,z<+\infty),\\ u|_{z=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

七. (6 分) 对于三维波动方程

$$u_{tt}=a^2\Delta_3 u,\ (a>0,t>0,-\infty<x,y,z<+\infty)$$

它的形如 $u=u(t,r)=T(t)R(r)$ 的解称为方程的可分离变量的径向对称解, 求方程满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}u=0$ 的可分离变量的径向对称解, 这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

八. (8 分) 考虑固有值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}[(1-x^2)y']+\lambda y=0,\ (0<x<1),\\ y'(0)=0,\ |y(1)|<+\infty.\end{cases}$$

1. 求此固有值问题的固有值和固有函数.

2. 把 $f(x)=2x+1$ 按此固有值问题所得到的固有函数系展开.

参考公式

见真题集开头.

2016-2017 学年第二学期数理方程 B 期末试题

一. (10 分) 求方程 $u_x + yu_{xy} = 0$ 的一般解.

二. (10 分) 求解一维半无界弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx},\ (t > 0, 0 < x < +\infty), \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = x,\ u_t|_{t=0} = 2\sin x. \end{cases}$$

三. (20 分) 考察一维有界限振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t,x),\ (t > 0, 0 < x < \pi), \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3}{2}x,\ u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

1. 当 $f(t,x) = 0$ 时, 求出上述定解问题的解 $u_1(x)$.

2. 当 $f(t,x) = \sin\dfrac{x}{2}\sin\omega t,\ (\omega \neq k + \dfrac{1}{2}, k \in \mathbb{N})$ 时, 求出上述定解问题的解 $u_2(t,x)$.

3. 指出定解问题中方程非齐次项 $f(t,x)$, 边界条件和初始条件的物理意义.

四. (15 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} ut = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}(xux) + u,\ (t > 0, 0 < x < 1), \\ u|_{x=0}\text{有界},\ u_x|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

五. (15 分) 求解如下泊松方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = z,\ (x^2 + y^2 + z^2 < 1), \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0. \end{cases}$$

六. (15 分) 设区域 $\Omega = \{(x,y)|y \geq x\}$.

1. 求区域 Ω 上的 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题的 Green 函数.

2. 求解如下 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ ((x,y) \in \Omega), \\ u(x,x) = \phi(x). \end{cases}$$

七. (15 分) 考察定解问题:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 3u, \ (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

1. 求出上述定解问题相应的基本解.

2. 当 $\varphi(x) = x$ 时, 求解上述定解问题.

参考公式

见真题集开头.

2018-2019 学年第二学期数理方程 B 期末试题

一. 设有一个均匀圆柱物体, 半径为 a, 高为 h, 侧面在温度为零的空气中自由冷却. 上底绝热, 下底温度为 $g(t,x,y)$, 初始温度为 $\varphi(x,y,z)$, 试写出圆柱体内温度所满足的定解问题. (不用求解, 仅列方程)

二. 求解一维无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4t + 2x,\ (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = \sin 3x. \end{cases}$$

三. 求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0,\ (0 < x < 9), \\ y(0) = y(9) = 0. \end{cases}$$

四. 求解一维有界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ (0 < x < 1, t > 0), \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 1, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

五. 求解如下泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1), \\ u|_{x^2+y^2=1} = 0, \\ u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=1} = 1 - (x^2 + y^2). \end{cases}$$

六. 求解热传导问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u,\ (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(0,x) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

七. 设平面区域 $\Omega = \{(x,y)|x + y > 0\}$,

1. 求出区域 Ω 的 Green 函数.

2. 求出区域 Ω 的定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ u(x,-x) = \varphi(x). \end{cases}$$

八. 计算积分

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)dx$$

参考公式

见真题集开头.

2019-2020 学年第二学期数理方程 B 期末试题 (毕业年级重修)

一. (18 分) 求解下列 Cauchy 问题:

1.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = \cos 2x. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 20, \\ u(0, y) = y^2,\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

二. (18 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数:

1.
$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0,\ (0 < x < \pi), \\ Y'(0) = 0,\ Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x^2 Y''(x) + xY'(x) + \lambda Y(x) = 0,\ (1 < x < b), \\ Y(1) = 0,\ Y'(b) = 0. \end{cases}$$

三. (18 分)

1. 求周期边界条件下

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1),\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) \end{cases}$$

的分离变量解 $u = T(t)X(x)$.

2. 求解

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1),\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1), \\ u(0, x) = \sin 2\pi x,\ u_t(0, x) = 2\pi \cos 2\pi x. \end{cases}$$

四. (14 分) 求解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u,\ (t > 0, \infty < x < +\infty), \\ u|_{t=0} = \delta(x + 1). \end{cases}$$

五. (18 分)

1. P_n 为 n-阶勒让德函数, 写出 $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$, 并计算积分 $\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)dx$.

2. 求解以下定解问题, 其中 (r,θ,ϕ) 为球坐标:

$$\begin{cases}\Delta_3 u = 0,\ (r<2),\\ u|_{r=2} = 3\cos 2\theta.\end{cases}$$

六. (14 分) 已知平面区域 $D = \{(x,y)| -\infty < x < +\infty, y < 1\}$.

1. 写出 D 内泊松方程第一边值问题的 Green 函数所满足的定解问题, 并求出 Green 函数.

2. 求解定解问题:

$$\begin{cases}u_{xx} + a^2 u_{yy} = 0,\ (-\infty < x < +\infty, y < 1),\\ u|_{y=1} = \varphi(x).\end{cases}$$

参考公式

见真题集开头.

2022-2023 学年第二学期数理方程 B 期末试题

一、(共 25 分 = 5+5+15) 求解定解问题

1. 一根无限长理想金属细杆初始温度为 $\varphi(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$。金属杆内部无热源，与外界无热量交换，比热、密度、热传导系数均为 1。请写出金属杆温度变化的定解问题（无需求解）。

2. 设 $u = u(x, y)$，求以下偏微分方程的通解：

$$u_{xy} = xy, \quad (-\infty < x, y < +\infty).$$

3. 设 $u = u(t, x)$，考虑以下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + f(t, x), & (t > 0,\ -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin x. \end{cases}$$

   (a) 如果 $f(t, x) = 0$，求 u；

   (b) 如果 $f(t, x) = 3\mathrm{e}^t \sin x$，求 u。

二、(共 25 分 = 10+15)

1. 求以下固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, & (0 < x < 5) \\ Y'(0) = 0, \quad Y(5) = 0. \end{cases}$$

   并将 $f(x) = 1$, $x \in (0, 5)$ 依该固有函数系展开。

2. 设 $u = u(t, x)$，求解：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \pi^2 u, & (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = \cos(\pi x), \quad u_t(0, x) = 1 + \cos(2\pi x). \end{cases}$$

三、(15 分) 设 $u = u(t, x, y)$，求解以下问题（注意时间起点为 $t = 1$）：

$$\begin{cases} u_t = \Delta_2 u, & (t > 1,\ x^2 + y^2 < 4) \\ u|_{x^2+y^2=4} = 0, \\ u(1, x, y) = 4. \end{cases}$$

四、(10 分) 设 (r,θ,φ) 为球坐标，设 $u=u(r,\theta)$ 在 $r>2$ 区域内满足：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & (r>2) \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u = 1, \\ u_r|_{r=2} = (\cos\theta)^2 + \cos\theta + 1. \end{cases}$$

求 $u(r,\theta)$。

五、(15 分) 设 $u=u(t,x)$，求解以下问题：

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + u_x + u, \quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

[(1)]

1. 如果 $\varphi(x)=\delta(x)$，求 u；
2. 如果 $\varphi(x)=\sin x$，求 u。

六、(15 分) 区域 $\Omega=\{(x,y)\mid x>-4,\ -\infty<y<+\infty\}$，$\partial\Omega$ 为其边界。

[1)]

1. 求出 Ω 内 Poisson 方程第一边值问题的格林函数 $G(M;M_0)$。
2. 设 $u=u(x,y)$，利用格林函数方法或其他方法求解以下定解问题：

$$\begin{cases} 4u_{xx} + 9u_{yy} = \delta(x,y), \quad (x,y)\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(y). \end{cases}$$

参考公式

见真题集开头.