

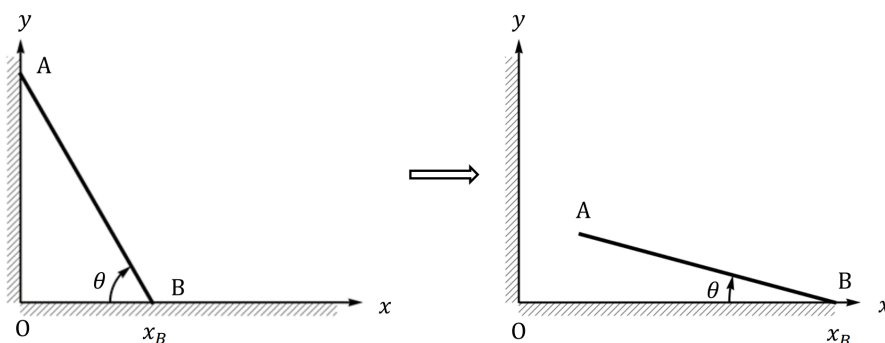
2026 春理论力学期中考试试卷

林烟*

2026 年 7 月 8 日

一、(30%)

一均匀细杆 AB，长为 a ，质量为 m ，一端 B 置于光滑水平面上，初始时杆与水平方向夹角为 θ_0 ，从静止释放。



(1) 考虑 A、B 两端都未脱离接触时的运动。以 θ 为广义坐标，写出系统的拉格朗日函数 L ，导出运动方程，并求出哈密顿量 H 。(10 分)

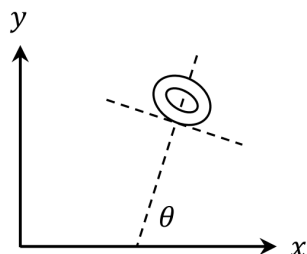
(2) 当杆与水平面夹角为 θ 时，求作用在 A、B 端的约束力 N_1, N_2 。判断哪端先脱离接触，并求脱离时的角度。(10 分)

(3) 考虑已经有一端脱离接触后的运动，以 x_B, θ 为广义坐标，写出拉格朗日函数并导出运动方程。(10 分)

*主要根据参考答案拟合的题目，有问题请联系: quiet@mail.ustc.edu.cn

二、(20%)

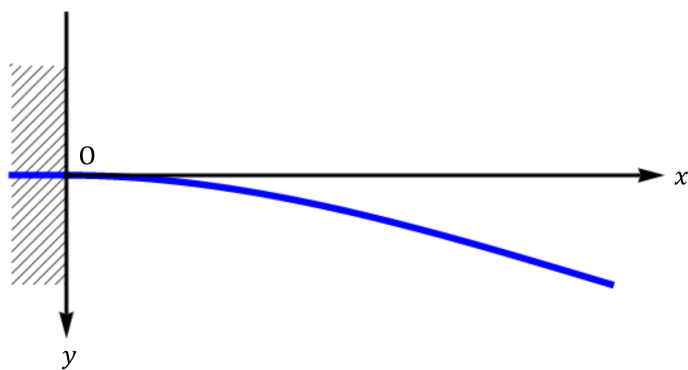
一轮子质量为 M ，半径为 R ，在倾角为 α 的斜面上做纯滚动，轮面始终保持与斜面垂直。设轮与斜面的接触点为 (x, y) ，轮子绕自身中心轴的自转角为 φ 。轮子绕中心轴转动惯量为 I_1 ，绕过质心且垂直于斜面的直径转动惯量为 I_2 。用 x, y, θ, φ 描述其运动。



- (1) 写出纯滚动约束的微分形式和变分形式。(4 分)
- (2) 写出系统的拉格朗日函数 L 。(6 分)
- (3) 利用 d'Alembert 原理导出系统的运动方程。(10 分)

三、(25%)

考虑一长度为 l 、线密度为 ρ 、刚度为 γ 的均匀细棒。



- (1) 求棒在竖直平面内静平衡时的形状 $y(0, x) = \varphi(x)$ ，已知左端固定 ($\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$)，右端自由且 $\varphi(l) = a$ 。(8 分)
- (2) 写出棒进行横向微振动的欧拉-拉格朗日方程及自然边界条件。(8 分)
- (3) 用分离变量法求色散关系 $\omega(k)$ 。(3 分)
- (4) 求满足边界条件的通解形式和存在非零解的条件，并求自然频率 ω (无需求出具体的解)。(6 分)

四、(25%)¹

质量为 m 、电荷为 q 的相对论粒子，在均匀磁场中运动。磁场的磁感应强度是 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 。

- (1) 请写出粒子的拉格朗日函数 $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 。(注意：写成非相对论动能的不得分)(5 分)
- (2) 根据拉氏函数写出拉格朗日方程。(6 分)
- (3) 系统的广义动量与广义能量是否守恒？写出这四个力学量中的守恒量。(4 分)
- (4) 这个拉氏函数是否具有转动对称性？若对称，请写出对应的诺特守恒量。(5 分)
- (5) 判断沿着 z - 轴的推动 (Lorentz boost)

$$\Delta t = \frac{\epsilon}{c}z, \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = \epsilon ct$$

是不是准对称变换。若是，请写出对应的诺特守恒量。(5 分)

祝考试顺利！

¹期中时由于教室安排冲突之类的，是用上课时间进行期中，只有 1h40min，因此只有四道题，正常情况下应该是五道（参见往年 zjj 的期中题）。