

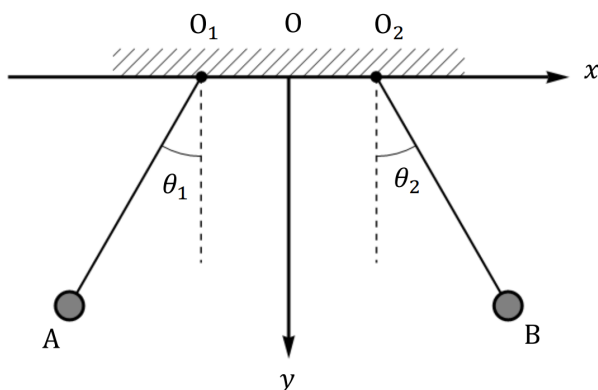
# 2026 春理论力学 A 期末考试试卷

林烟\*

2026 年 7 月 8 日

## 一、微振动 (20%)

有两个质量均为  $m$  的小球 A、B，用长度为  $l$  的轻杆悬挂于固定点  $O_1$ 、 $O_2$ ， $O_1O_2$  间距为  $d$ ，两小球带等量同号电荷  $Q$ 。假定系统在竖直平面内进行小角度摆动。建立如图所示坐标系， $\theta_1$ 、 $\theta_2$  为两杆与竖直方向夹角。



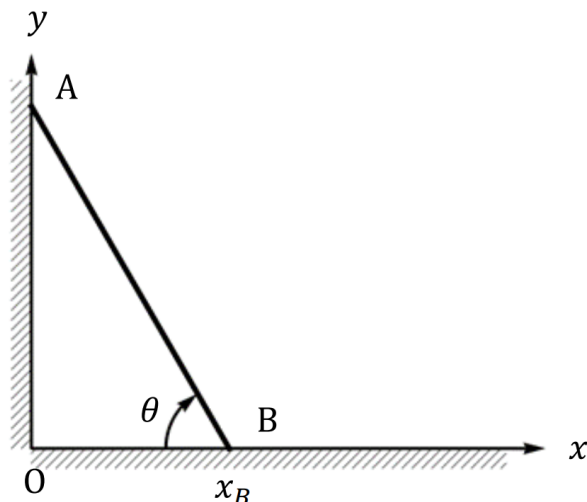
- (1) 求出平衡角  $\theta_0$ . (2 分)
- (2) 引入微振动坐标  $\eta_1 = \theta_1 + \theta_0$ ,  $\eta_2 = \theta_2 - \theta_0$ , 写出简谐近似下的拉格朗日函数  $L$ . (10 分)
- (3) 求自然频率  $\omega_1, \omega_2$  和归一化的模态矩阵. (8 分)

---

\* 主要根据参考答案拟合的题目，有问题请联系: quiet@mail.ustc.edu.cn

## 二、哈密顿方程 (15%)

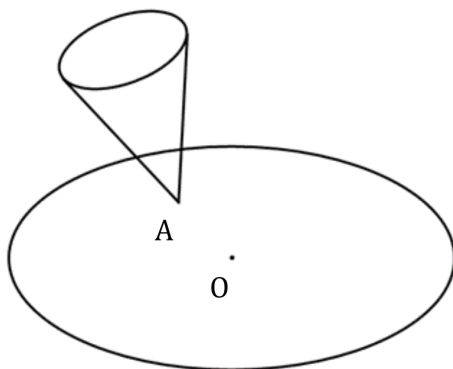
一均匀细杆 AB, 长  $a$ , 质量  $m$ , 一端 B 在光滑水平面上滑动, 杆与水平方向夹角为  $\theta$ . 只考虑 A 离开竖直面前的运动。



- (1) 写出系统的拉格朗日函数  $L(\theta, \dot{\theta})$ . (3 分)
- (2) 求广义动量  $p_\theta$ , 并通过勒让德变换得到哈密顿量  $H(\theta, p_\theta)$ . (6 分)
- (3) 写出哈密顿正则方程。 (6 分)

## 三、刚体力学 (20%)

一质量为  $m$  的拉格朗日陀螺 ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ), 质心为 C, 顶点 A 在圆盘上, 到质心的距离为  $l$ , 到圆盘中心 O 距离为  $a$ , 陀螺以角速度  $\omega_0$  绕通过 O 垂直于盘面的轴匀速转动。用 Euler 角  $\theta, \phi, \psi$  描述系统姿态。



- (1) 写出拉格朗日函数。 (14 分)
- (2) 用拉格朗日函数导出对应的运动方程。 (6 分)

## 四、哈密顿-雅可比方程 (20%)

一粒子在保守力的作用下在平面内运动, 采用极坐标  $(r, \theta)$  表示的势能为  $V(r, \theta)$ .

- (1) 写出受限哈密顿-雅可比方程。(6 分)
- (2) 若方程可以分离变量求解, 写出  $V(r, \theta)$  的一般形式。(6 分)
- (3) 在 (2) 的条件下, 将受限哈密顿-雅可比方程分离为 2 个常微分方程。(6 分)
- (4) 若  $V(r, \theta) = \frac{1}{2}kr^2$  (谐振子情形), 求  $W_2(\theta)$  的表达式 (用积分形式表示)。(2 分)

## 五、正则变换 (15%)

给出以下正则变换:

$$Q_1 = q_1 q_2, \quad Q_2 = q_1 + q_2, \quad P_1 = 1 - \frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2}, \quad P_2 = -q_1 - q_2 + \frac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1 - q_2}.$$

- (1) 求规范函数  $F(q, p)$ 。(6 分)
- (2) 判断是否存在第一类生成函数  $F_1(q, Q)$ , 若存在, 写出表达式; 若不存在, 给出理由。(3 分)
- (3) 判断是否存在第二类生成函数  $F_2(q, P)$ , 若存在, 写出表达式; 若不存在, 给出理由。(6 分)

## 六、泊松代数 (10%)

质量为  $m$ 、位矢为  $\vec{r}$ 、动量为  $\vec{p}$  的质点受到立方反比有心力的作用, 其哈密顿函数  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r^2}$ , 生成函数  $G = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2} - Ht$ .

- (1) 计算泊松括号  $[G, H]$ 。(6 分)
- (2) 证明  $G$  是运动积分。(4 分)

**祝考试顺利!**