

2025-2026 春季学期 统计力学 期末考试

2026 年 6 月 28 日 14:30-16:30

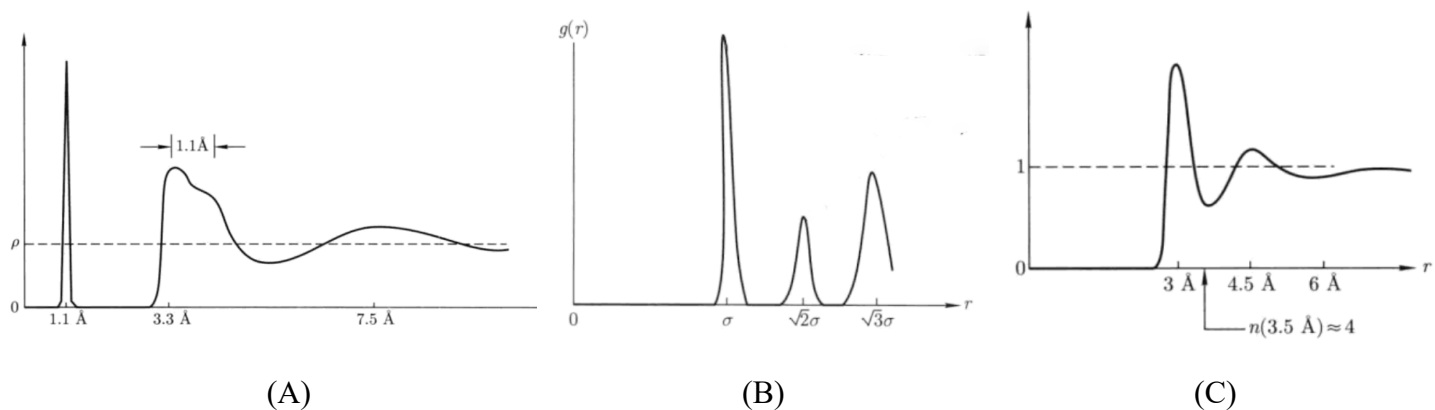
注: 本试卷为回忆版, 实际表述与试卷不符, 且可能会有错漏, 请以原卷为准

一 简答题(每题 5 分, 共 20 分)

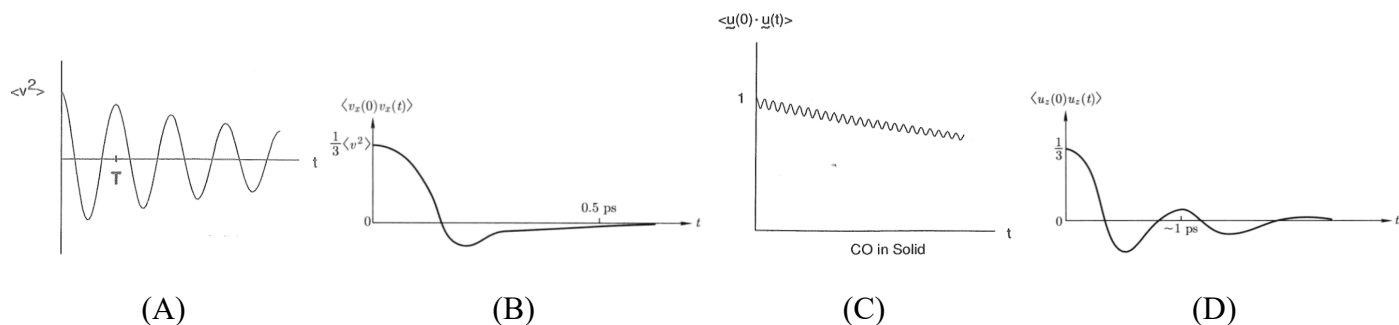
1. 简述统计力学两个基本假设.
2. 固体声子热容的 Einstein 模型和 Debye 模型有什么区别?
3. 简述平均场理论的基本思想. 平均场理论预言一维和二维 Ising 模型是否有相变?
4. Einstein 和 Langevin 在布朗运动的处理上主要区别是什么?

二 选填空题(共 20 分)

5. 设微正则系综中的状态数为 Ω , 则系统处于每一态的概率是_____, 系统的熵可以表示为_____ ; 正则系综中的配分函数的表达式为_____, 系统处于某一态的概率可以表示为_____, 自由能与配分函数的关系可以表示为_____, 能量的涨落与热容的关系为_____. (5 分)
6. Fermi-Dirac 分布中, 处于特定能级的粒子数分布的表达式为_____ ; Bose-Einstein 分布中为_____ ; Maxwell-Boltzmann 分布中为_____ ; 满足什么条件时前两种分布可以近似认为是 Maxwell-Boltzmann 分布? _____. (4 分)
7. 下列径向位置分布函数图像中, () 是液氮的径向分布函数, () 是高度有序固体的径向分布函数, () 是水分子氢氧原子之间的径向分布函数. (3 分)



8. 下列自关联函数图像中, () 是液体速度的自关联函数, () 是固体 CO 的取向的自关联函数, () 是固体速度的自关联函数, () 是气体取向的自关联函数. (4 分)



9. 对一维 Ising 模型, 粗粒化重整变换后, 得到的新的相互作用强度 K' 与外场强度 h' 和与原来的 K 与 h 满足(). (3 分)

- A. $K' > K, h' > h$ B. $K' > K, h' < h$ C. $K' < K, h' > h$ D. $K' < K, h' < h$

三 解答题(每题 12 分, 共 60 分)

1. 已知范德瓦尔斯气体方程

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

范德瓦尔斯气体组成的系统中, 设体系压强为 p , 体积为 V , 温度为 T , 玻尔兹曼常数为 k_B , 其正则配分函数为 Z_N ,

(1) 求证:

$$p = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z_N}{\partial V} \right)_{T, N}$$

(2) 求证:

$$\ln Z_N = N \ln(V - nb) + \beta a \frac{n^2}{V} + W_T(N)$$

其中 $W_T(N)$ 为只与 T, N 有关的函数.

(3) 利用理想气体极限 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$, 写出理想气体自由能的表达式.

2. 考虑一个一维类 Ising 模型, 每个格点上的自旋变量具有三种状态 $s_i \in \{-1, 0, 1\}$. 系统的无量纲哈密顿量满足:

$$-\beta H = \sum_i K s_i s_{i+1}$$

(1) 用 Kadanoff 块自旋变换对该系统进行粗粒化. 每个新区块包含两个相邻的自旋 (a, b) , 将其映射为新的块自旋 S_I . 规则如下: 若 $a + b \geq 1$, 则记 $S_I = 1$, 若 $a + b = 0$, 则记 $S_I = 0$, 若 $a + b \leq -1$, 则记 $S_I = -1$. 请写出宏观状态 $S_I = 1, 0, -1$ 分别对应的全部 9 种微观构型 (a, b) . (5 分)

(2) 定义相邻两个块 (a, b) 与 (c, d) (其块自旋分别记为 S_I 和 S_{II}) 之间新的转移权重为:

$$M_{S_I S_{II}} = \sum_{(a, b) \in S_I} \sum_{(c, d) \in S_{II}} \exp\left(\frac{K}{2} ab + K bc + \frac{K}{2} cd\right)$$

式中 $\frac{1}{2}$ 因子用于防止块内相互作用的重复计数. 请计算权重 M_{11} 、 M_{10} 、 $M_{1,-1}$ 以及 M_{00} 的表达式. (4 分)

(3) 新的权重与原有的单参数哈密顿量形式是否封闭? (3 分)

3. 考虑 N 个非相对论的 Bose 气体, 体积为 V , 温度为 T , 化学势为 μ , 逸度 $z = e^{\beta\mu}$, 其中 $\beta = 1/(k_B T)$, k_B 为玻尔兹曼常数, $\rho = N/V$. 色散关系为 $\varepsilon_k = (\hbar^2 |\mathbf{k}|^2)/(2m)$.

(1) 求体系的巨配分函数(展开为 z 的级数). (5 分)

(2)求 βp 和 ρ 的关系. (4 分)

(3)已知 $\frac{\beta p}{\rho} = 1 + B_2(T)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)$, 其中 $B_2(T)$ 称为第二位力系数, 求体系的 $B_2(T)$. (3 分)

提示:

$$\sum_k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|k|^2} d^3k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad -\ln(1-x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l}$$

4. 一个一维布朗运动的粒子, 运动方程为 $\gamma \dot{x} = \eta(t)$, 其中随机噪声满足 $\langle \eta(t) \rangle = 0$, 关联函数 $\langle \eta(0)\eta(t) \rangle = \sigma \exp(-\frac{t}{\tau})$, 其中 σ 为噪声强度参数.

(1) 求粒子的均方位移 $\langle x^2(t) \rangle$.

(2) 求粒子的扩散系数 D .

5. 一阶线性响应理论, 设扰动为 $f(t)$, 与力学量 A 耦合, 在线性项有:

$$\Delta \bar{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t, t') f(t')$$

其中 $\chi(t, t')$ 是响应函数, 已知自关联函数

$$\langle \delta A(0) \delta A(t) \rangle = \langle (\delta A)^2 \rangle e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(1) 利用涨落-耗散定理, 求 $\chi(t, t')$ 的表达式.

(2) 设微扰具有如下形式:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ f, & t_1 < t < t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

求 $\Delta \bar{A}(t)$ 的表达式.

(3) 结合你在本课程学过的所有知识, 写出涨落-耗散定理的至少四种形式, 并加以简要解释(经典, 量子均可). (6 分)