

2026春天体力学与天体测量基础期末考试

注意事项:

1. 本次考试为开卷考试.

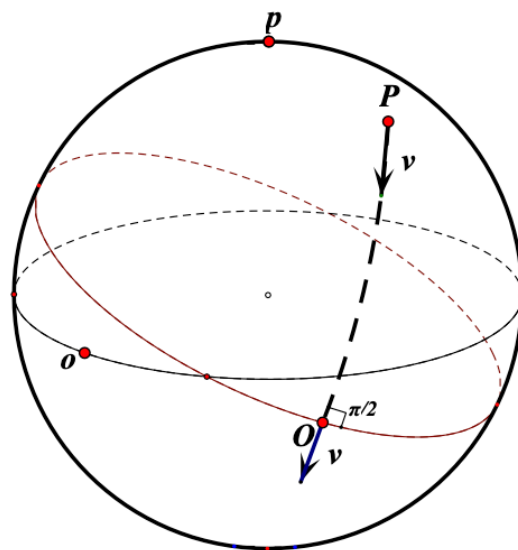
解答题

1. 如图所示, 天球坐标系 $\{P, Q\}$ 的定点 P 在固定坐标系 $\{p, q\}$ 中的经纬度为:

$$\begin{cases} a_P = t, \\ b_P = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

其中 t 为时间.

- (1) 求任意无旋天球坐标系 $\{P, Q\}$ 中经度零点 Q 在坐标 $\{p, q\}$ 中的经纬度; (10 分)
- (2) 写出从 $\{p, q\}$ 到 $\{P, Q\}$ 的坐标变换. (10 分)



2. 已知四维时空 (ct, x^1, x^2, x^3) 中度规为:

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right).$$

其中 $i, j = 1, 2, 3$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$, $w = -\frac{GM}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}$. 已知某个时钟在

$0 \leq t \leq 1$ 的时间段内坐标为:

$$x^1 = \frac{GM}{\alpha} \cos t, \quad x^2 = \frac{GM}{\alpha} \sin t, \quad x^3 = 0.$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个量纲为 $\left[\frac{GM}{L} \right]$ 的常数. 已知时钟在 $t = 0$ 时读数为 0, 求时钟在 $t = 1$ 时的读数. (10 分)

3. 已知在球坐标 (ct, r, α, δ) 下球对称史瓦西时空线元为:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dc^2 t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(\cos \delta^2 d\alpha^2 + d\delta^2).$$

- (1) 写出史瓦西度规 $g_{\mu\nu}$ 的矩阵形式 (g_{ab}) ; (5 分)
- (2) 根据度规 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 的关系, 写出 $g^{\mu\nu}$ 的矩阵形式 (g^{ab}) ; (5 分)
- (3) 计算克里斯朵夫符号 $\Gamma_{\mu\nu}^2$, 其中 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. (10 分)

4. N 体系统 $\{m_i\}_{i=1}^N$ 在位形空间中的分布可以由之心坐标系中的位矢 $\{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^N$ 描述, 系统关于质心的惯量矩 J 和力函数 V 分别为:

$$J = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \rho_{ij}, \quad V = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}}.$$

其中 $M = \sum_{i=1}^N m_i$, $\rho_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{\xi}_j|$. 试根据中心构型是函数 JV^2 的驻点这一条件, 解出所有的 $N = 4$ -体系统的 3 维中心构型. (10 分)

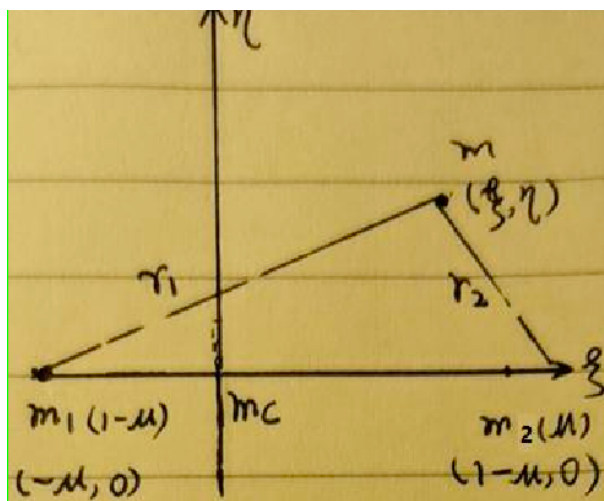
5. 如图，考虑一个平面圆型限制性三体问题，选取合适的坐标系对物理量进行无量纲化，其中两体质量分别为 $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ，此处不失一般性地假设 $m_1 > m_2$ ，有限体绕转运动周期为 2π 。已知有限体的拉格朗日方程为：

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi - \frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(\xi-1+\mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{\eta} - 2\dot{\xi} = \eta - \frac{(1-\mu)\eta}{r_1^3} - \frac{\mu\eta}{r_2^3}. \end{cases}$$

- (1) 试证明有限体存在雅可比积分 (10 分)：

$$\frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}{2} - \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) = -C.$$

- (2) 对于 $\mu = \frac{1}{2}$ ，存在稳定平衡点 $\xi = \eta = 0$ ，计算运动积分常数 C 的值；(5 分)
- (3) 对于 $\mu = \frac{1}{2}$ ，存在稳定平衡点 $\xi = 0$, $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 C 的值。(5 分)



6. 对于延展体, 在球坐标 (r, λ, φ) 下, 距离其质心 r 处的引力势可以写为:

$$U(r, \lambda, \varphi) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda).$$

其中 M, R 为延展体的质量和特征半径, $P_n(a) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{da^n} (a^2 - 1)^n$ 为 a 的 n 次勒让德多项式, $P_{nm}(a) = (1 - a^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{da^m} P_n(a)$ 为 a 的 n 次 m 阶连带勒让德多项式.

(1) 写出带谐项系数和田谐项系数的下标满足的条件; (4 分)

(2) 已知 $C_{00} = 1$, 计算 $n = 0$ 阶的引力势 $U(r, \lambda, \varphi)$, 并写出引力势满足的所有对称性; (4 分)

(3) 假设 C_{2m} 和 S_{2m} 均为已知常数, 计算在直角坐标中 P 点的引力势 $U(x, y, z)$ 的 $n = 2$ 阶项. (12 分)