中国科学技术大学

2024～2025 学年第二学期考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：现代原子与分子物理导论　　课程代码：PHYS5101P.01

开课院系：物理学院　　考试形式：半开卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿

题　号	1	2	3	4	5	6	总　分
满　分	16	15	18	20	15	16	100
得　分							

注：共六道大题，请勿漏答。请在首页写上姓名和学号，并在每道题下方空白处答题，答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸。在考试过程中，不允许使用计算器或手机等任何电子产品。

物理常数：

普朗克常数　$h = 6.63\times10^{-34}$ J·s

玻尔兹曼常数　$k_B = 1.38\times10^{-23}$ J/K

超精细结构 A、B 系数：$E = A\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J} + B\frac{3(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})^2+\frac{3}{2}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})-I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)J(2J-1)}$

Pauli 矩阵性质：$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

对氢原子主量子数为 n，轨道量子数为 L 时，

$$\langle\frac{1}{r^2}\rangle_{n,L} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{a_0},\qquad \langle\frac{1}{r^2}\rangle_{n,L} = \frac{1}{n^3\left(L+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{a_0^2},\qquad \langle\frac{1}{r^3}\rangle_{n,L} = \frac{1}{n^3L\left(L+\frac{1}{2}\right)(L+1)}\frac{1}{a_0^3}$$

这里 a_0 是玻尔半径。

Breit-Rabi 公式（忽略核磁矩）：$E_{F=I\pm1/2} = -\frac{\Delta E_{hfs}}{2(2I+1)} \pm \frac{\Delta E_{hfs}}{2}\left(1+\frac{4mx}{2I+1}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$，这里，$x = \frac{g_J\mu_B B}{\Delta E_{hfs}}$.

Rb 原子参数：

^{87}Rb 核自旋　　I=3/2

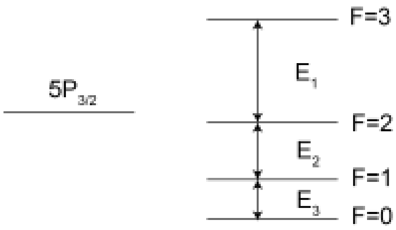


图 1 ^{87}Rb 5P$_{3/2}$态能级图

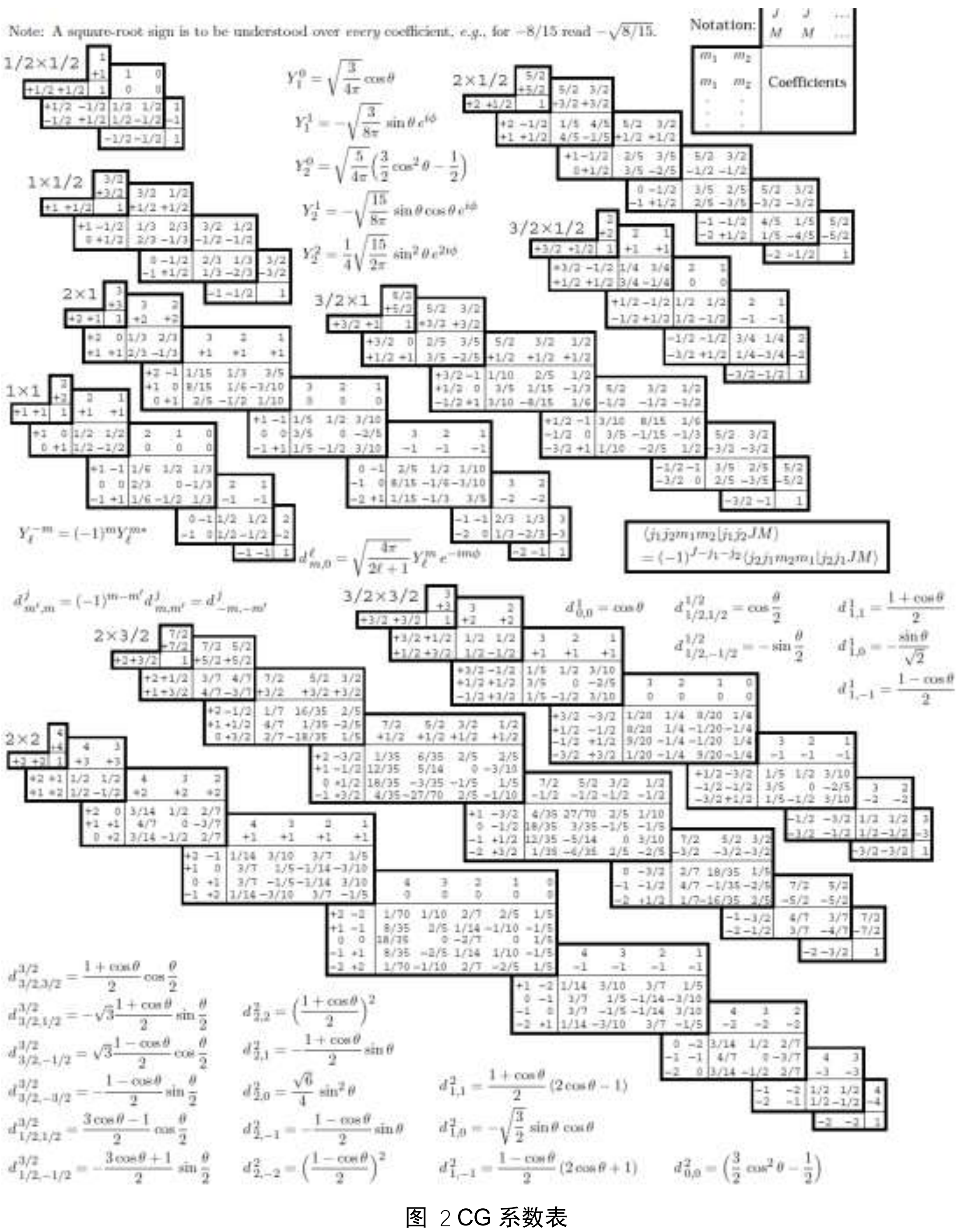


图 2 CG 系数表

1. （a）（6 分）请分析决定超精细 A 系数和 B 系数的相互作用来源。

（b）（4 分）^{87}Rb 原子 $5S_{1/2}$ 态的超精细分裂有没有超精细 B 系数贡献?为什么?

（c）（6 分） 根据试卷首页的超精细分裂表达式和图一，在只考虑 ^{87}Rb 原子 $5P_{3/2}$ 态的 F=3，F=2 和 F=1 态间的能级分裂情况下，用 E_1 和 E_2 表示 $5P_{3/2}$ 态的超精细系数 A 和 B。

（a） 超精细 A 系数来自两部分相互作用：

一是核磁矩与电子磁矩之间的偶极-偶极相互作用（2 分），

二是电子绕核子运动产生的磁场与核磁矩之间的耦合（2 分）

超精细 B 系数来自核电四极矩与电子的电场梯度之间的耦合（2 分）

（b）^{87}Rb 原子 $5S_{1/2}$ 态的超精细分裂没有超精细 B 系数贡献。（2 分）

超精细 B 系数出现的条件是需要电子角动量和核子角动量量子数同时大于 1/2，而 Rb 原子基态的电子角动量只有 1/2，不满足上述条件。（2 分）

（c）由超级细能级分裂的表达式得：

$E_1 = E_{F=3} - E_{F=2} = 3A + B$ （2 分）

$E_2 = E_{F=2} - E_{F=1} = 2A - B$ （2 分）

从而有：

$\mathrm{A} = \frac{E_1 + E_2}{5}$ （1 分）

$\mathrm{B} = \frac{2E_1 - 3E_2}{5}$ （1 分）

2. （15 分）考虑 ^{87}Rb 原子，核磁矩的大小可以忽略。

(a)（5 分）对给定的 F，J，I 和 S 量子数，请将 g_F 的表达式写成 g_s 和 g_L 的一般表达式。并依此计算$|5P_{3/2}, F=1\rangle$态的 g_F。

(b)（4 分）请解释在外磁场存在的情况下，为什么 $5S_{1/2}\ |F=2, m_F=1\rangle$有非线性塞曼频移，而 $5S_{1/2}\ |F=2, m_F=2\rangle$没有非线性塞曼频移。

(c)（6 分）设基态的超精细相互作用可以写成 AI·J（这里，I 和 J 均为无量纲的量子数）的形式，在外磁场为 B 时，计算 $5S_{1/2}\ |F=1, m_F=1\rangle$到 $5S_{1/2}\ |F=2, m_F=2\rangle$的跃迁能量ΔE（将结果展开保留到 B^2 项）。

（a）根据投影定理，有：

$$g_F=\frac{I\cdot F}{F(F+1)}g_I+\frac{J\cdot F}{F(F+1)}g_J=\frac{J\cdot F}{F(F+1)}\left[\frac{S\cdot J}{J(J+1)}g_S+\frac{L\cdot J}{J(J+1)}g_L\right]$$

$$=\frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)}\left[\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}g_S+\frac{J(J+1)+L(L+1)-S(S+1)}{2J(J+1)}g_L\right]$$（3 分）

代入 F=1, J=3/2, L=1, S=1/2，g_s=2, g_L=1 有：

$g_{5P3/2,F=1}$ =2/3（2 分）

（b） 在外磁场下，原子的塞曼相互作用的哈密顿量 H_B 是磁偶极与外磁场耦合。碱金属原子基态非线性塞曼效应来源于 H_B 将基态 m_F 相同的两个能级耦合起来，产生新的本征态和本征能量。这样，H_B 可以将 $5S_{1/2}\ |F=2, m_F=1\rangle$与 $5S_{1/2}\ |F=1, m_F=1\rangle$耦合，产生非线性塞曼频移。（2 分）

而基态 F=1 态上没有 m_F=2 的能级， $5S_{1/2}\ |F=2, m_F=2\rangle$在 H_B 作用下并不与其他态耦合，从而没有非线性塞曼频移。（2 分）

（c）根据超精细作用，有:

$$\Delta E_{hfs}=2A$$

根据 Breit-Rabi 公式，两个能级的能量分别为：

$$E_{\mathrm{F=1,mF=1}}=-\frac{\mathrm{A}}{4}-A\left[1+\frac{\mu_B B}{A}+\left(\frac{\mu_B B}{A}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$E_{\mathrm{F=2,mF=2}}=\frac{3\mathrm{A}}{4}+g_J m_J\mu_B B=\frac{3\mathrm{A}}{4}+\mu_B B$$

跃迁能量为:

$$\Delta \mathrm{E} = A + \mu_B B + A\left[1 + \frac{\mu_B B}{A} + \left(\frac{\mu_B B}{A}\right)^2\right]^{1/2} \quad （3 分）$$

对上式最后一项进行二阶泰勒展开，保留到 B 的二阶项，有：

$$\Delta \mathrm{E} = 2\mathrm{A} + \frac{3}{2}\mu_B B + \frac{3(\mu_B B)^2}{8A} \quad （3 分）$$

3. （18 分）m_L 与 m_S 是电子的轨道和自旋量子数。考虑 ^{87}Rb 原子，计算：

（a）（7 分） $<5S_{1/2},F=1,m_F=1|m_L+2m_S|5S_{1/2},F=2,m_F=1>$

（b）（11 分） $<5P_{3/2},F=2,m_F=1|m_L+2m_S|5P_{3/2},F=3,m_F=1>$

(a) 对 $5S_{1/2}$ 态，利用 CG 系数表，有：

$$\left|F=2,m_F=1>=\frac{\sqrt{3}}{2}\right|m_J=\frac{1}{2},m_I=\frac{1}{2}>+\frac{1}{2}|m_J=-\frac{1}{2},m_I=\frac{3}{2}> \quad （2 分）$$

$$\left|F=1,m_F=1>=-\frac{1}{2}\right|m_J=\frac{1}{2},m_I=\frac{1}{2}>+\frac{\sqrt{3}}{2}|m_J=-\frac{1}{2},m_I=\frac{3}{2}> \quad （2 分）$$

对基态，还有 $L=m_L=0$，$m_s=m_J$，由此可得：

$<F=1,m_F=1|m_L+2m_S|F=2,m_F=1>$

$=2<F=1,m_F=1|m_J|F=2,m_F=1>$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}<m_J=\frac{1}{2},m_I=\frac{1}{2}|m_J|m_J=\frac{1}{2},m_I=\frac{1}{2}>+\frac{\sqrt{3}}{4}<m_J=-\frac{1}{2},m_I=\right.$
$\left.\frac{3}{2}|m_J|m_J=-\frac{1}{2},m_I=\frac{3}{2}>\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ （3 分）

(b) 对 $5P_{3/2}$ 态，利用 CG 系数表，有：

$|F=3,m_F=1>=\sqrt{\frac{1}{5}}|m_J=\frac{3}{2},m_I=-\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{3}{5}}|m_J=\frac{1}{2},m_I=\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{1}{5}}|m_J=$
$-\frac{1}{2},m_I=\frac{3}{2}>$ （2 分）

$\left|F=2,m_F=1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\right|m_J=\frac{3}{2},m_I=-\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{2}}|m_J=-\frac{1}{2},m_I=\frac{3}{2}>$ （2 分）（整体差一个负号算对）

$|J=\frac{3}{2},m_J=\frac{3}{2}>=|m_L=1,m_s=\frac{1}{2}>$ （2 分）

$|J=\frac{3}{2},m_J=-\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{2}{3}}|m_L=0,m_s=-\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{1}{3}}|m_L=-1,m_s=\frac{1}{2}>$ （2 分）

$<F=2,m_F=1|m_L+2m_S|F=3,m_F=1>$

$$=\sqrt{\frac{1}{10}}<J=\frac{3}{2},m_J=\frac{3}{2}|m_J+m_S|J=\frac{3}{2},m_J=\frac{3}{2}>$$

$$-\sqrt{\frac{1}{10}}<J=\frac{3}{2},m_J=-\frac{1}{2}|m_J+m_S|J=\frac{3}{2},m_J=-\frac{1}{2}>$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{1}{10}} < m_L = 1, m_s = \frac{1}{2}|m_s|m_L = 1, m_s = \frac{1}{2} >$$

$$- \sqrt{\frac{1}{10}}\left(\frac{2}{3} < m_L = 0, m_s = -\frac{1}{2}|m_s|m_L = 0, m_s = -\frac{1}{2} > + \frac{1}{3} < m_L = -1, m_s = \frac{1}{2}|m_s|m_L = -1, m_s = \frac{1}{2} >\right)$$

$= \frac{8}{3\sqrt{10}}$ （3 分）（如果由于|F=2,mF=1>CG 系数展开整体差一个负号导致结果变为 $-\frac{8}{3\sqrt{10}}$，也算对）

4. （20 分）电子的电荷为-e，自旋算符为$\mathbf{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$，动量算符为 p。在氢原子中，电子感受到的电场算符为$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$，氢原子的波函数为|n,L>。

（a）（6 分）证明 $\mathbf{p}\times\mathbf{E}+\mathbf{E}\times\mathbf{p}=0$

（b）（6 分）证明：

$$\mathrm{U}=p^2e\Phi+e\Phi p^2-2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})e\Phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})=e\hbar^2\nabla\cdot\boldsymbol{E}+2e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})$$

（c）（8 分）利用试卷首页给出的氢原子的波函数形式，计算对氢原子 $nP_{1/2}$ 态 U 的期望值。

(a) 考虑$(\mathbf{p}\times\mathbf{E})$的某个分量：

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{E})_i=\epsilon_{ijk}p_jE_k=\epsilon_{ijk}\left(E_kp_j+[p_j,E_k]\right)=\epsilon_{ijk}\left(E_kp_j-i\hbar\frac{\partial E_k}{\partial x_j}\right)\quad（2 分）$$

根据 Levi-Civita 符号的性质有：$\epsilon_{ijk}E_kp_j=-\epsilon_{ikj}E_kp_j=-(\mathbf{E}\times\mathbf{p})_i$ （2 分）

根据叉乘的性质有：$\epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j}=(\nabla\times\mathbf{E})_i$ （2 分）

合并上面各式可得：$\mathbf{p}\times\mathbf{E}+\mathbf{E}\times\mathbf{p}=-\mathrm{i}\hbar(\nabla\times\mathbf{E})$

根据 Maxwell 方程知，在氢原子中，$\nabla\times\mathbf{E}=0$，所以有：$\mathbf{p}\times\mathbf{E}+\mathbf{E}\times\mathbf{p}=0$

(b) 根据 Pauli 矩阵的性质可得：$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2=p^2$，这样可得：

$$\mathrm{U}=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2e\Phi+e\Phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2-2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})e\Phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})=[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p},[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p},e\Phi]]\quad（3 分）$$

$$[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p},e\Phi]=\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{p},e\Phi]=-ie\hbar\nabla\Phi=ie\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\quad（1 分）$$

$$\mathrm{U}=[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p},ie\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}]=ie\hbar[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})]\quad（1 分）$$

根据 Pauli 矩阵的另一个性质：$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，可得：

$$\mathrm{U}=ie\hbar[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})]=ie\hbar[\boldsymbol{p},\boldsymbol{E}]+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\quad（1 分）$$

代入(a)的结论有：$\mathrm{U}=e\hbar^2\nabla\cdot\boldsymbol{E}+2e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})$ （1 分）

(c) 根据 Maxwell 方程，对氢原子有：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho(e)}{\varepsilon_0}=\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r})\quad（2 分）$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{2}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\quad（2 分）$$

合并上面两式有：$\mathrm{U}=\frac{e^2\hbar^2}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r})+\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$，其中第一项在 L 不为零时的期

望值为零。这样，有：

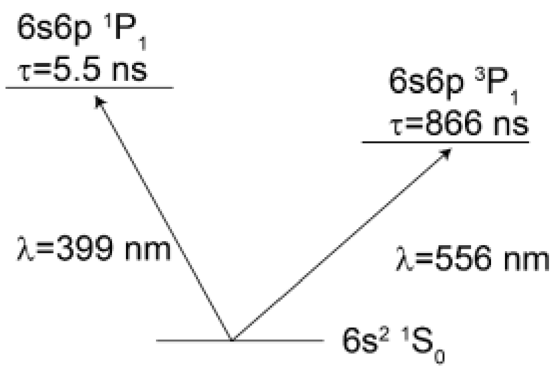
$$\langle \mathrm{U}\rangle_{n,L=1}=\frac{e^2\hbar^2}{\pi\varepsilon_0}\langle\frac{1}{r^3}\rangle_{n,L=1}\left[\frac{J(J+1)-s(s+1)-L(L+1)}{2}\right]_{J=\frac{1}{2},L=1}=-\frac{e^2\hbar^2}{3n^3\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a_0^3}\quad（4 分）$$

5. ^{171}Yb 最外层有两个电子。它常用于激光冷却的能级结构和相关激发态自然寿命如图所示。由于 Yb 原子较重，其电子的组态介于 LS 耦合与 JJ 耦合之间，从而使基态向(6s6p) $^3P_1$ 的跃迁变得不完全禁戒。

(a) （4 分）请简要分析(6s6p) $^1P_1$ 能量比(6s6p) $^3P_1$ 高的原因。

(b) （6 分）在实验中，通常先使用 $6s^2\ ^1S_0$ ->(6s6p) $^1P_1$ 跃迁作为冷却光实现第一极 MOT （蓝 MOT）。然后再将磁光阱的激光频率切换到 $6s^2\ ^1S_0$ ->(6s6p) $^3P_1$ 跃迁附近，将第一级 MOT 转换为第二级 MOT（绿 MOT）。请简单分析这个操作先后顺序的原因。

(c) （5 分）请估算绿 MOT 中原子的激光冷却的多普勒极限温度。



(a) (6s6p) $^1P_1$ 中电子处于自旋单态，这样，它电子的空间波函数需要满足电子交换对称；而(6s6p) $^3P_1$ 中电子处于自旋三重态，电子的空间波函数需要满足电子交换反对称。（2 分）

空间波函数交换反对称的两个电子的距离要比交换对称的情况更远，这样，电子空间波函数交换反对称的态具有的库伦作用势能也要更低。（2 分）

(b) 基态到(6s6p) $^1P_1$ 态跃迁是被允许的偶极跃迁，跃迁速率相对较高，是个强跃迁，对原子有很好的减速效果，并可以俘获较多的原子。但由于其自然寿命较短，原子冷却的温度较高。（3 分）

基态到(6s6p) $^3P_1$ 跃迁速率相对较低，是个弱跃迁，直接用于冷却热原子效率较低。但由于其自然寿命较长，在第一级磁光阱基础上，将冷却光切换到该跃迁附近，可以对被束缚的原子做进一步冷却。（3 分）

（c）基态到(6s6p) $^3P_1$ 跃迁的线宽为：$\Gamma = \frac{1}{\tau}$

激光冷却的多普勒极限温度为：

$\mathrm{T} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} = \frac{\hbar}{2k_B\tau}$ （2 分）

=4.4 μK （3 分，结果在此精确结果 20%以内算对，否则算错）

6. （a）（6 分）请以二能级系统为例，简单分析饱和吸收谱的工作原理；

（b）（5 分）请以三能级系统为例，简单分析饱和吸收谱中出现交叉峰的原因；

（c）（5 分）近年来，一些实验研究发现，将原子充入没有缓冲气体、光传播方向厚度在百纳米量级的微型气室，可以有效抑制饱和吸收谱中的交叉峰，请简要分析原因。

(a) 饱和吸收谱的工作原理包括三要素：

1. 需要两束频率相同，功率不同的光，且两束光相向传播。观测功率弱的光的吸收。（2 分）
2. 功率强的光和弱的光由于传播方向相反，相同速度的原子感受到两束光的多普勒频移相反。当光频率与二能级系统的跃迁频率不共振时，两束光分别与速度不同的原子共振作用，几乎互不干扰。（2 分）
3. 当光频率与二能级系统的跃迁频率接近共振时，强光与弱光同时与速度接近零的原子相互作用。强光会引起该部分原子在激发态的布居趋于饱和，从而弱光的吸收相对减弱。（2 分）

(b) 三能级系统的交叉峰出现的原因包括两个要素：

1. 当激光介于基态到两个激发态跃迁频率中间值时，强光和弱光可以同时与速度非零（v）的原子共振作用，从而出现饱和吸收效应。（3 分）
2. 速度 v 对应的多普勒频移的绝对值接近基态到两个激发态跃迁频率差的一半。（2 分）

(c) 微型气室压制交叉峰包括两个因素：

1. 激发态原子碰到气室壁会立即退激发；（2 分）
2. 由于气室厚度极小，交叉峰对应的速度为 v 的那些原子在极短的时间内碰壁，从而使原子在激发态的布居大幅缩减，进而抑制了饱和吸收现象。（3 分）

（从 Dicke Narrowing 角度分析算对，其他合理的解释可以酌情给分）