中国科学技术大学　2025 年 5 月 9 日 9:45 - 11:55

2025春广义相对论与宇宙学期中考试

注意事项：

1. 写出必要的计算过程，本次考试共 5 题，总分 100 分；
2. 参考公式：

- Christoffel 符号：$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$.
- Riemann 曲率张量：$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}$.
- Ricci 张量：$R_{\sigma\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}$；
  Ricci 标量：$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$.
- 张量的联络：$\nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p} = \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} T^{\lambda\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p} + \cdots - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu_1} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\lambda\cdots\nu_p} - \cdots$
- 爱因斯坦场方程：$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.
- 能-动量张量：$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$.
- Killing 矢量场定义及性质：$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0$, $\nabla^\rho \nabla_\rho K_\mu = -R_\mu{}^\sigma K_\sigma$, $\nabla_\mu \nabla_\rho K^\mu = R_{\mu\rho} K^\mu$, $K^\mu \nabla_\mu R = 0$.
- 可能用到的结果：$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g}$.

解答题

1. 牛顿力学的引力势为

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

试论证通过坐标变换 $x'^i = x'^i(x^j, t)$, $t' = t$ 能否消除引力效应?（不考虑 $r = 0$ 点）

2. 已知标量场拉氏密度：

$$\mathscr{L}_{\phi} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - V(\phi).$$

（1）求标量场的能-动量张量 $T_{\mu\nu}$，及其迹 $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$；

（2）若标量场可视为理想流体 $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+\rho)u_{\mu}u_{\nu}$，4-速度已经归一化 $u_{\mu}u^{\mu} = -1$，对比 (1) 的结果，分别写出标量场能量密度 ρ 、压强 p 和速度 u_{μ}.

3. 我们可以将 Killing 矢量场与电磁场做类比，对 Killing 矢量 K_{μ}，构造张量 $F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}K_{\nu} - \nabla_{\nu}K_{\mu}$。试证明张量 $F_{\mu\nu}$ 满足方程 $\nabla_{\mu}F^{\nu\mu} = J^{\nu}$，并写出源 J^{ν} 与能-动量张量的关系，并论证其是否满足守恒条件 $\nabla_{\nu}J^{\nu} = 0$.

4. 写出下列方程在共形变换 $\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x) g_{\mu\nu}$ 后的形式：

（1）标量场：$\Box\phi = 0$；

（2）自由 Maxwell 方程：$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$; $\nabla_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0$.

5. 人们曾用如下形式来表示引力场的作用量：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (-\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} \Gamma^\rho{}_{\rho\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}).$$

试论证其是否与 Einstein-Hilbert 作用量 $S_H = \dfrac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} R$ 等价?

（提示：作用量等价表示其只有表面项不同；可以利用度规相容性 $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ 处理 $\partial_\rho g_{\mu\nu}$.）