中国科学技术大学　2025 年 6 月 24 日 15:00 - 17:00

2025春广义相对论与宇宙学期末考试

注意事项：

1. 写出必要的计算过程，本次考试共 5 题，总分 100 分；

2. 参考公式：

- Christoffel 符号：$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$.
- 协变微分：$\nabla_\mu Y^\nu = \partial_\mu Y^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} Y^\lambda$,　$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda$
- 测地线方程：$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$
- Schwarzschild 度规：$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2$
- 静态时空的 de Sitter 度规：$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2$
- Reissner - Nordström 度规：$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2+P^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2+P^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2$
- 亚极端（$GM^2 > Q^2 + P^2$）下的 Reissner - Nordström 黑洞的事件视界：$r_\pm = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - G(Q^2+P^2)}$
- 弯曲宇宙的 FRW 度规：$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\Omega^2\right]$
- Friedman 方程：$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$;
- 物质组分占比：$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_i$，其中 $\rho_{\mathrm{cr}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$;
- 时空弯曲等效能量密度：$\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G a^2}$，时空弯曲组分：$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{a^2}$.

解答题

1. 考虑度规 $g_{\mu\nu}$ 的一个共形 Killing 矢量 K，满足：$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = \phi(x) g_{\mu\nu}$，其中 $\phi(x)$ 是一个标量函数.

　（1）利用测地线方程证明，沿类光测地线存在守恒量；

　（2）考虑共形变换 $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$，证明 K 也是 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 的一个共形 Killing 矢量，其中 $\Omega(x)$ 是一个正定的标量场.

2. 对于 Schwarzschild 度规，考虑坐标变换 $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t + F(r)\mathrm{d}r$，其中 $F(r)$ 是关于径向坐标 r 的标量函数.

（1）若变换后的坐标 (T, r, θ, ϕ) 在 $T = const.$ 时是平直空间，求标量函数 $F(r)$ 的具体形式.（这样的度规被称为 Painlevé - Gullstrand 度规.）

（2）在 Painlevé - Gullstrand 度规中，$r = 2GM$ 处是否是奇异的？请说明理由.

3. 引力波方程的推迟格林函数给出引力波满足：

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = 4G \int_V \mathrm{d}^3 y \frac{T_{\mu\nu}(t_\mathrm{r}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}.$$

其中推迟时间 $t_\mathrm{r} = t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$，$V$ 为有物质分布的范围. 现在考虑线性引力场且物质源很远的情况，即 $r = |\boldsymbol{x}| \gg |\boldsymbol{y}|, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \approx r$. 试证明引力波可以写为：

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{r} \frac{\mathrm{d}^2 I_{ij}}{\mathrm{d}t^2}.$$

并写出物质四极矩 I_{ij} 的具体形式.
提示，你可以考虑如下等式和线性引力场近似下能-动量张量守恒 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 等方程.

$$\int_V \mathrm{d}^3 y T^{ij}(t_\mathrm{r}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} \int_V \partial_k (y^i T^{kj} + y^j T^{ik}) - \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 y (y^i \partial_k T^{kj} + y^j \partial_k T^{ik}) = -\frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 y (y^i \partial_k T^{kj} + y^j \partial_k T^{ik}).$$

4. （1）静态时空的 de Sitter 度规中，当 r, θ, ϕ 均为常数时的世界线是否为测地线?

（2）考虑亚极端 $(GM^2 > Q^2 + P^2)$ 下的 Reissner - Nordström 黑洞，试证明光子在黑洞中径向运动方程满足 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \pm\dfrac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)}$，并求出此积分.

5. 考虑非平直宇宙空间，已知各组分能量密度随标度因子 a 的演化关系为 $\rho_\mathrm{m} \propto a^{-3}$, $\rho_\mathrm{r} \propto a^{-4}$, $\rho_\Lambda \propto a^0$, $\rho_\kappa \propto a^{-2}$，分别对应物质、辐射、宇宙学常数和时空弯曲等效能量密度. 试证明各组分占比 Ω_i 满足：

$$\Omega_\kappa(z) = \frac{\Omega_{\kappa 0}}{\Omega_{\mathrm{m}0}(1+z) + \Omega_{\mathrm{r}0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}(1+z)^{-2} + \Omega_{\kappa 0}}.$$

其中 z 为宇宙学红移，下标物理量在现在的值.