2025 春电磁学 H 期中期末考试试题与解答

反馈邮箱：yellowdogisntadog@163.com

2025 年 7 月 4 日

声明：本试卷为中国科学技术大学 2025 年春学期电磁学 H 课程试卷，出题人为叶邦角教授等. 在此对尊敬的叶老师表示由衷的感谢，这门课程让笔者受益匪浅. 如有版权问题，请立即联系本人邮箱 yellowdagisntadog@163.com ，笔者会在第一时间删除. 由于这是笔者的回忆版本，难免有错误或疏漏，解答也有值得商榷之处. 如有对试卷内容的问题，也请提出以便笔者修改. 欢迎对试卷内容和解答进行改进.

1 2025 年期中考试

1.1 试题

1. 正方体边长 $2a$，在每个面的面心放置一个电偶极子，大小为 p ，方向都朝向同一个方向，这个方向任意. 求正方体体心的电场.

2. 半径为 R 的导体球接地，在距离球心 d 处放置一个电偶极子 p ，方向为正好背离球心的方向.
   (a) 求所有电像的位置以及电荷量（或偶极矩）.
   (b) 求空间中电势的分布和系统的电场能. 前者可以引入位置参数而不全部用球坐标表达.
   (c) 求电偶极子的受力.
   (d) 假定这个导体球半径趋于无穷大，而电偶极子到导体球表面的距离 $h = d - R$ 不变，这时就等效于一个无穷大导体平板. 在此极限下，求电偶极子的受力.

3. 考虑两个半径分别为 a, b 的介质球 1,2 （ 1 在 2 左边），相对介电常数都是 ε_{r} ，相距 $d \gg a, b$ ，在空间中加上向右的匀强电场 E_0 .（已知：一个半径为 R 、相对介电常数为 ε_{r} 的球体在外电场 E_0 的作用下会产生一个电偶极矩 $p = 4\pi\varepsilon_0\alpha R^3 E_0$ ，其中常数 $\alpha = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+2}$ ）本题中我们只考虑电偶极矩而不考虑电四极矩.
   (a) 要求考虑一阶近似，求两个球的电偶极矩.
   (b) 求两个介质球内部电场.
   (c) 如果将两个球换为导体球，求两个球的电偶极矩和内部电场.

4. 空间中有半径 a 的导体球；外面从半径 a 到半径 b 包裹着一层相对介电常数 ε_{r} ，电导率 σ 的漏电介质；再半径 b 外面整个空间都填充相对介电常数为 1 ，电导率为 σ_0 的介质. 在初始状态下，让导体球带电 Q_0 .

(a) 求系统的电阻、电容、初始状态静电能.

(b) 求在漏电过程中任意时刻 t 任意半径 r 处，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和传导电流密度 $\boldsymbol{j}$.

(c) 求两种介质的分界面（半径 b 处）任意时刻 t 的自由电荷量.

(d) 使用焦耳热功率密度，计算整个漏电过程中产生的焦耳热.

1.2 解答

1. 一个电偶极子在相对它位矢 $\boldsymbol{r}$ 处的电场为：

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{3\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r\right)\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.1}$$

以中心为原点建立直角坐标系，则合电场可以写为：

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{6}\left[-\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\frac{3\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{i\to O}\right)\boldsymbol{e}_{i\to O}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right]=-\frac{6\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\frac{3}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\sum_{i=1}^{6}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{i\to O}\right)\boldsymbol{e}_{i\to O} \tag{1.2}$$

对于上下两个电偶极子，第二项中的求和为：

$$\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{1\to O}\right)\boldsymbol{e}_{1\to O}+\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{2\to O}\right)\boldsymbol{e}_{2\to O}=\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_z\right)\boldsymbol{e}_z+\left(\boldsymbol{p}\cdot\left(-\boldsymbol{e}_z\right)\right)\left(-\boldsymbol{e}_z\right)=2p_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3}$$

其它方位的电偶极子同理，则总电场为：

$$\boldsymbol{E}=-\frac{6\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\frac{3}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(2p_x\boldsymbol{e}_x+2p_y\boldsymbol{e}_y+2p_z\boldsymbol{e}_z\right)=-\frac{6\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\frac{6\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=\boldsymbol{0} \tag{1.4}$$

2. (a) 以球心向电偶极子的方向为 z 轴，建立球坐标. 将电偶极子 p 看作两个相距 $l\ll R,d$ 的点电荷 $\pm q$ ，有 $p=ql$ ，即正电荷 q 位于距离球心 $d+\frac{l}{2}$ 处，负电荷 $-q$ 位于距离球心 $d-\frac{l}{2}$ 处. 它们分别的像电荷为：

   - 在距离球心 $\frac{R^2}{d+\frac{l}{2}}\approx\frac{R^2}{d}\left(1-\frac{l}{2d}\right)$ 处的电荷 $-\frac{R}{d+\frac{l}{2}}q=-\frac{R}{d}\left(1-\frac{l}{2d}\right)q$.
   - 在距离球心 $\frac{R^2}{d-\frac{l}{2}}\approx\frac{R^2}{d}\left(1+\frac{l}{2d}\right)$ 处的电荷 $\frac{R}{d-\frac{l}{2}}q=\frac{R}{d}\left(1+\frac{l}{2d}\right)q$.

   它们的总电量为 $-\frac{R}{d}\left(1-\frac{l}{2d}\right)q+\frac{R}{d}\left(1+\frac{l}{2d}\right)q=\frac{R}{d^2}ql=\frac{R}{d^2}p$ ，零阶近似位于距离球心 $\frac{R^2}{d}$ 处. 另外，两个像电荷的零阶项一正一负，组成一个像电偶极子，为 $\left(\frac{R}{d}q\right)\left[\frac{R^2}{d}\left(1+\frac{l}{2d}\right)-\frac{R^2}{d}\left(1-\frac{l}{2d}\right)\right]=\frac{R^3}{d^3}ql=\frac{R^3}{d^3}p$ ，它的方向与原电偶极子相同. 总结为两个不同的像电荷或像电偶极子：

   - 在距离球心 $\frac{R^2}{d}$ 处的像电荷 $\frac{R}{d^2}p$.
   - 在距离球心 $\frac{R^2}{d}$ 处的像电偶极子 $\frac{R^3}{d^3}p$ ，方向与原电偶极子同向，即背离球心.

   (b) 为表达方便，设场点 P 到原电偶极子和像的距离分别为 r_1,r_2 ，到两处的连线分别与 z 轴正向夹角为 α_1,α_2 ，可以表达为位置的函数：

$$r_1\left(r,\theta\right)=\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta} \tag{1.5a}$$

$$r_2\left(r,\theta\right)=\sqrt{r^2+\left(\frac{R^2}{d}\right)^2-2\frac{R^2}{d}r\cos\theta} \tag{1.5b}$$

$$\alpha_1\left(r,\theta\right)=\arccos\frac{r\cos\theta-d}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} \tag{1.5c}$$

$$\alpha_2\left(r,\theta\right)=\arccos\frac{r\cos\theta-\frac{R^2}{d}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{R^2}{d}\right)^2-2\frac{R^2}{d}r\cos\theta}} \tag{1.5d}$$

空间电势分布由像电荷、像电偶极子和原电偶极子三部分产生，为：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{R}{d^2}p}{r_2}+\frac{\frac{R^3}{d^3}p\cos\alpha_2}{r_2^2}+\frac{p\cos\alpha_1}{r_1^2}\right) \tag{1.6}$$

再求系统的电场能，用公式 $W_{\mathrm{e}}=\iiint\frac{1}{2}\rho\varphi\mathrm{d}V$ ，由于导体球接地，所有只要算电偶极子部分的电场能即可：

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}q\varphi(\boldsymbol{r}_+)+\frac{1}{2}(-q)\varphi(\boldsymbol{r}_-)\approx\frac{1}{2}q\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\boldsymbol{l}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1.7}$$

导体球在电偶极子处产生的电场即像电荷和像电偶极子在该处产生的电场，为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{R}{d^2}p}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}\boldsymbol{e}_z+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\frac{R^3}{d^3}p}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^3}\boldsymbol{e}_z=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\left(d^2+R^2\right)}{\left(d^2-R^2\right)^3}\boldsymbol{e}_z \tag{1.8}$$

则电场能为：

$$W_{\mathrm{e}}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{p^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R\left(d^2+R^2\right)}{\left(d^2-R^2\right)^3} \tag{1.9}$$

(c) 采用虚功原理求受力. 设电偶极子到球心距离为 z ，上式中将 d 代换成 z ，将电场能看作 z 的函数：

$$W_{\mathrm{e}}(z)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{p^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R\left(z^2+R^2\right)}{\left(z^2-R^2\right)^3} \tag{1.10}$$

设用一个外力 F_{ext} 沿 z 方向将电偶极子拉动虚位移 $\mathrm{d}z$ ，则由虚功原理，有：

$$F_{\mathrm{ext}}\delta z=\delta W_{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}z}\delta z\quad\Rightarrow F_{\mathrm{ext}}=\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}z} \tag{1.11}$$

而由受力平衡，电偶极子受到的电场力为 $F_{\mathrm{e}}=-F_{\mathrm{ext}}=-\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}z}$ （以 z 为正方向），则：

$$F_{\mathrm{e}}=-\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}z}=\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Rz\left(z^2+2R^2\right)}{\left(z^2-R^2\right)^4} \tag{1.12}$$

代入 $z=d$ 得到：

$$F_{\mathrm{e}}=-\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\left(d^2+2R^2\right)}{\left(d^2-R^2\right)^4} \tag{1.13}$$

正方向为 z 轴正向，即远离球心的方向. 因此为引力.

(d) 在上一问中代入 $h=d-R$ ，并认为 $h\ll R$ 作近似有：

$$F_{\mathrm{e}}=-\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{R(R+h)\left((R+h)^2+2R^2\right)}{\left((R+h)^2-R^2\right)^4}\approx-\frac{3p^2R^4}{32\pi\varepsilon_0h^4} \tag{1.14}$$

为引力. 这也就给出了一个电偶极子在无限大导体平板上受到的力.

3. (a) 先考虑零阶近似，两个球各自在外场 E_0 的极化下先产生一个电偶极矩（以与 E_0 同向为正方向，下同）：

$$p_{10}=4\pi\varepsilon_0\alpha a^3E_0 \tag{1.15a}$$

$$p_{20}=4\pi\varepsilon_0\alpha b^3E_0 \tag{1.15b}$$

随后两个电偶极矩都会在对方处产生一个附加电场：

$$E_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_{10}}{d^3} = \frac{2\alpha a^3}{d^3}E_0 \tag{1.16a}$$

$$E_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_{20}}{d^3} = \frac{2\alpha b^3}{d^3}E_0 \tag{1.16b}$$

这个电场会让另一个球产生一个新的极化：

$$\Delta p_1 = 4\pi\varepsilon_0\alpha a^3 E_{21} = \frac{8\pi\varepsilon_0\alpha^2 a^3 b^3}{d^3}E_0 \tag{1.17a}$$

$$\Delta p_2 = 4\pi\varepsilon_0\alpha b^3 E_{12} = \frac{8\pi\varepsilon_0\alpha^2 a^3 b^3}{d^3}E_0 \tag{1.17b}$$

则在一阶近似下两个球的电偶极矩分别为：

$$p_1 = 4\pi\varepsilon_0\alpha a^3 E_0 + \frac{8\pi\varepsilon_0\alpha^2 a^3 b^3}{d^3}E_0 \tag{1.18a}$$

$$p_2 = 4\pi\varepsilon_0\alpha b^3 E_0 + \frac{8\pi\varepsilon_0\alpha^2 a^3 b^3}{d^3}E_0 \tag{1.18b}$$

(b) 内部电场由三部分产生，原电场 E_0 ，自身极化产生的退极化场，以及另一个球在自身处的电场（在计算另一个球在自身处的电场时直接用零阶近似即可）：

$$E_1 = E_0 - \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + E_{21} = E_0 - \left(\alpha E_0 + \frac{2\alpha^2 b^3}{d^3}E_0\right) + \frac{2\alpha b^3}{d^3}E_0 = (1-\alpha)\,E_0 \tag{1.19a}$$

$$E_2 = E_0 - \frac{p_2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + E_{12} = E_0 - \left(\alpha E_0 + \frac{2\alpha^2 a^3}{d^3}E_0\right) + \frac{2\alpha a^3}{d^3}E_0 = (1-\alpha)\,E_0 \tag{1.19b}$$

(c) 当两球为导体时，即 $\varepsilon_0 \to +\infty$ ，此时 $\alpha = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}-1}{\varepsilon_\mathrm{r}+2} \to 1$ ，则有：

$$E_1 = E_2 = 0 \tag{1.20}$$

这符合我们对于导体内部无静电场的认知.

4. (a) 电容和电阻容易求得：

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r + \int_b^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}} \tag{1.21a}$$

$$R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sigma\cdot 4\pi r^2} + \int_b^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\sigma_0\cdot 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\sigma_0 b}\right) \tag{1.21b}$$

当带电 Q_0 时，当做电容器的储能得到：

$$W_{\mathrm{e}0} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}}{8\pi\varepsilon_0}Q_0^2 \tag{1.22}$$

(b) 设在 r 以内包裹的所有自由电荷量为 $q = q\,(r,t)$ ，由电位移矢量的 Gauss 定理， r 处的电场 $\boldsymbol{E} = E\,(r,t)\,\boldsymbol{e}_r$ 满足：

$$4\pi r^2 D = q \quad\Rightarrow\quad E = \begin{cases} \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}r^2} & a<r<b \\ \dfrac{D}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>b \end{cases} \tag{1.23}$$

设电流为 $\boldsymbol{j}=j\left(r,t\right)\boldsymbol{e}_r$ ，它满足 Ohm 定律. 考虑一个半径 r 的球面的电荷通量，由电荷守恒：

$$4\pi r^2 j=-\frac{\partial q}{\partial t} \tag{1.24}$$

这里：

$$j=\begin{cases}\sigma E=\dfrac{\sigma q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2} & a<r<b\\ \sigma_0 E=\dfrac{\sigma_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>b\end{cases} \tag{1.25}$$

代入上式得到：

$$\frac{\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}=-\frac{\partial q}{\partial t}\quad a<r<b \tag{1.26a}$$

$$\frac{\sigma_0 q}{\varepsilon_0}=-\frac{\partial q}{\partial t}\quad r>b \tag{1.26b}$$

由于上式与 r 无关，退化为常微分方程. 结合初始条件 $q\left(r,t=0\right)=Q_0$ ，解得：

$$q\left(r,t\right)=\begin{cases}Q_0\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t} & a<r<b\\ Q_0\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t} & r>b\end{cases} \tag{1.27}$$

将上式的解代入 E,j 中即可得到：

$$E\left(r,t\right)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}=\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t} & a<r<b\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t} & r>b\end{cases} \tag{1.28a}$$

$$j\left(r,t\right)=\begin{cases}\dfrac{\sigma q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}=\dfrac{\sigma Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t} & a<r<b\\ \dfrac{\sigma_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\sigma_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t} & r>b\end{cases} \tag{1.28b}$$

(c) 要求出分界面处的自由电荷量，只需在半径 b 的内外无限靠近分界面处各作一个球面，它们内部所包含的自由电荷量之差即为分界面处自由电荷量：

$$\Delta q\left(t\right)=q\left(r=b_+,t\right)-q\left(r=b_-,t\right)=Q_0\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t}-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t}\right) \tag{1.29}$$

(d) 先求出任意位置任意时刻的热功率密度：

$$\omega\left(r,t\right)=jE=\begin{cases}\dfrac{\sigma Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t}\cdot\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t}=\dfrac{\sigma Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon_{\mathrm{r}}r^4}\mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}^2}t} & a<r<b\\ \dfrac{\sigma_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t}\cdot\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t}=\dfrac{\sigma_0 Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}\mathrm{e}^{-\frac{2\sigma_0}{\varepsilon_0}t} & r>b\end{cases} \tag{1.30}$$

由此计算在整个放电时间中整个空间电流产生的热：

$$Q=\int_0^{+\infty}\iiint\omega\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b\frac{\sigma Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon_{\mathrm{r}}^2r^4}\mathrm{e}^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}t}4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_b^{+\infty}\frac{\sigma_0 Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}\mathrm{e}^{-\frac{2\sigma_0}{\varepsilon_0}t}4\pi r^2\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t \tag{1.31}$$

积分得：

$$Q=\frac{\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}}{8\pi\varepsilon_0}Q_0^2=W_{\mathrm{e}} \tag{1.32}$$

恰好等于初始时刻电容器的储能，说明所有的能量都转化为了电流的热耗散.

2 2025 年期末考试

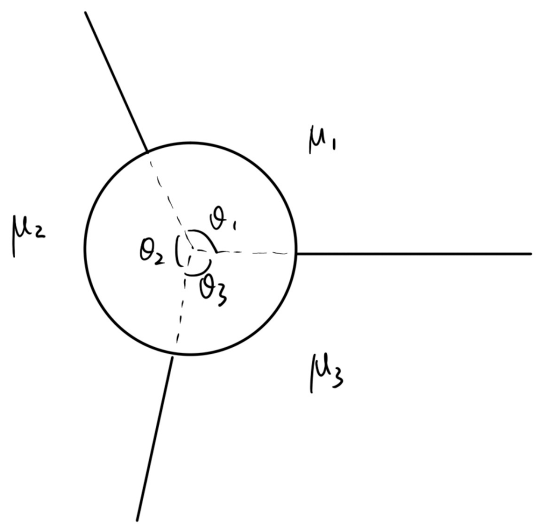
2.1 试题

1. 一电阻率和粗细均匀导体圆环半径为 R ，以环心建立极坐标在 $\theta = 0$ 位置，用直导线从无穷远处沿径向引入电流 I ，并在 $\theta = \theta_0$ 位置，用另一根直导线从环上将电流沿径向引向无穷远处. 求环心处磁感应强度.

2. 空间中有一导体空心圆筒半径 R ，周围的空间被分为三块，绝对磁导率分为为 μ_1, μ_2, μ_3 ，且相对圆心的张角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ，现在在圆筒上沿轴向通电流 I .

   (a) 求三个介质内的磁感应强度和磁场强度分布.

   (b) 求圆筒表面各个区域的自由电流和磁化电流分布.



3. 真空中的同轴电缆，内外半径分别为 a, b 且为薄圆筒.

   (a) 向内外圆筒中分别输入方向相反电流 I ，求空间中磁感应强度分布以及同轴电缆的单位长度自感.

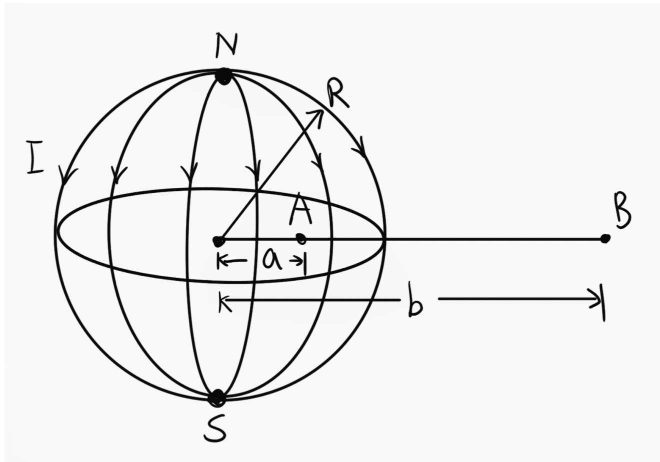
   (b) 现在把电流改为一个随时间变化的电流，变化率恒定为 k ，已知半径 $r = a$ 处涡旋电场强度为 E_a ，求涡旋电场.

4. 在一个半径为 R 球面上均匀地布置 $N \gg 1$ 个经线圈导线，现在北极点发出电流 I ，流过这些经线后在南极汇合. 设 A,B 两点在赤道面上，分别距离球心 a, b 且有 $a < R < b$.

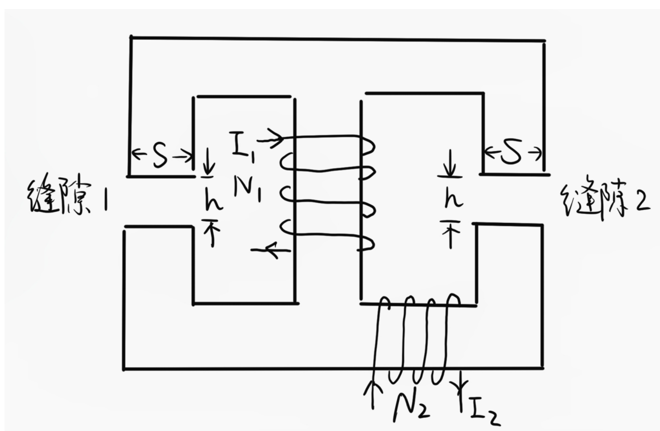
   (a) 求 A,B 两点的位移电流密度.

   (b) 求 A,B 两点的磁场.

   (c) 设 $t = 0$ 时刻南北极都没有净电荷且电流恒定，求任意时刻 A 点的能量密度和能流密度.



5. 如图，两个线圈匝数分别为 N_1, N_2 ，电流分别为 I_1, I_2 ，认为铁芯的相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}} \gg 1$. 有两处空气隙，尺寸相同，厚度为 h ，正对面积为 S .
   (a) 求两处缝隙分别的磁感应强度和磁场强度.
   (b) 求两个线圈分别的自感以及互感.
   (c) 求左边缝隙处上下铁芯之间的吸力.



6. 在相对介电常数、相对磁导率分别为 $\varepsilon_{\mathrm{r}}, \mu_{\mathrm{r}}$ 的介质中有电磁波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})}$.
   (a) 证明 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}=0$.
   (b) 证明 $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}} E_0=\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \mu_{\mathrm{r}}}}$.
   (c) 证明波速为 $v=\frac{c}{n}$ ，其中 $n=\frac{1}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}} \varepsilon_{\mathrm{r}}}}$
   (d) 求电磁波的能量密度 w 和能流密度 S .
   (e) 证明 $\boldsymbol{S}=\frac{c}{n} w \boldsymbol{e}_k$ ，其中 $\boldsymbol{e}_k=\frac{\boldsymbol{k}}{k}$ 为波矢方向的单位矢量.

2.2 解答

1. 两根直导线在环心显然不产生磁场. 考虑圆环上的电流，两侧的电阻之比为 $\theta_0 : (2\pi - \theta_0)$ ，则电流之比为 $(2\pi - \theta_0) : \theta_0$. 又由于两边的长度之比恰好是 $\theta_0 : (2\pi - \theta_0)$ ，所以两边产生的磁场大小恰好相等，而方向相反，则环心处没有磁场.

2. (a) 由于磁感应强度在分界面上的法向连续性，三个介质中的磁感应强度相同为 B ，根据磁场强度的环路定理有：

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) Br = I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{I}{\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) r} \tag{2.1}$$

各个区域的磁场强度也容易求出：

$$H_i = \frac{B}{\mu_i} = \frac{\frac{1}{\mu_i} I}{\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) r} \tag{2.2}$$

(b) 自由电流分布可以通过磁场强度的边值关系 $\Delta \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}^{\mathrm{cond}}$ 求出，这里研究圆筒表面，由于筒内部无磁场，有：

$$i_i^{\mathrm{cond}} = H_i \left(r = R\right) = \frac{\frac{1}{\mu_i} I}{\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) R} \tag{2.3}$$

要求磁化电流，可以先求磁化强度：

$$M_i = \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_0} H_i = \frac{\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_i}\right) I}{\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) r} \tag{2.4}$$

则根据 $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}^{\mathrm{mag}}$ 磁化电流面密度为：

$$i_i^{\mathrm{mag}} = M \left(r = R\right) = \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_0} H_i = \frac{\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_i}\right) I}{\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} + \frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_3}{\mu_3}\right) R} \tag{2.5}$$

3. (a) 磁感应强度：

$$B\left(r\right) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \tag{2.6}$$

单位长度电感为：

$$L = \frac{\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathrm{d}r}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{2.7}$$

(b) 由于 $r < a$ 内部无磁场，因此电场无散无旋，又由于边界上为恒定值 E_a ，则内部电场为恒定值 $E = E_a$ ，同理外部也是匀强电场 $E = E_b$. 考虑两个筒之间的部分，做一个纵截面内的长方形环路，从 a 到 r ，长度为 l ，对它列涡旋电场的环路定理有 $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ，有：

$$El - E_a l = \int_a^r \frac{\partial}{\partial t} B\left(r'\right) l \mathrm{d}r' = \frac{\mu_0 k l}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad E\left(r\right) = E_a + \frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \tag{2.8}$$

代入 $r = b$ 可以算出 $E_b = E_a + \frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ，这也就是外部的匀强电场的场强.

4. (a) 由于北极点总是流出电流，南极点总是流入电流，两个极点都有电荷的积累. 设南极点的积累电荷为 $Q = Q(t)$ 则有 $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. 则 A,B 两点的位移电流是由于南北极点在场点产生的电场随时间变化导致. 所以我们先求 A,B 点电场：

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2QR}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \tag{2.9a}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2QR}{(R^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \tag{2.9b}$$

则位移电流密度为：

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi}\frac{2IR}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \tag{2.10a}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi}\frac{2IR}{(R^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \tag{2.10b}$$

(b) 求磁场用环路定理 $\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\iint\left(\boldsymbol{j}^{\mathrm{cond}}+\boldsymbol{j}^{\mathrm{D}}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 对于 A 点，取半径 a 的环路，中间没有传导电流，故只要计算位移电流的通量（上一问已经算出了 a 处的位移电流密度，只要将 a 改为 r 即为球内赤道面上任意一点的位移电流密度）：

$$2\pi a B_{\mathrm{A}} = \mu_0\int_0^a \frac{1}{4\pi}\frac{2IR}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}2\pi r\mathrm{d}r = \mu_0 I\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\boldsymbol{e}_\phi \tag{2.11}$$

B 点同理，但是这里传导电流不再为零：

$$2\pi b B_{\mathrm{B}} = \mu_0\left(\int_0^b \frac{1}{4\pi}\frac{2IR}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}2\pi r\mathrm{d}r - I\right) = -\mu_0 I\frac{R}{\sqrt{R^2+b^2}} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{B}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{R}{\sqrt{R^2+b^2}}\boldsymbol{e}_\phi \tag{2.12}$$

(c) 此时 $Q(t) = It$. 计算能量密度：

$$w_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{A}}^2 = \frac{I^2R^2t^2}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+a^2)^3} + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2a^2}\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)^2 \tag{2.13a}$$

$$w_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{B}}^2 = \frac{I^2R^2t^2}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+b^2)^3} + \frac{\mu_0 I^2R^2}{8\pi^2b^2(R^2+b^2)} \tag{2.13b}$$

计算能流密度：

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}\times\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{A}} = -\frac{I^2Rt}{4\pi^2\varepsilon_0(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\boldsymbol{e}_r \tag{2.14a}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\times\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{B}} = \frac{I^2R^2t}{4\pi^2\varepsilon_0(R^2+a^2)^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.14b}$$

原题只要求求出 A 点的能量密度和能流密度.

5. (a) 两处线圈的磁动势分别为 $E_1 = N_1I_1, E_2 = N_2I_2$ ，空气隙的磁阻均为 $R = \frac{h}{\mu_0 S}$ ，根据磁路定理列方程：

$$R\Phi_1 = E_2 \tag{2.15a}$$

$$R\Phi_2 = E_1 + E_2 \tag{2.15b}$$

解得两个空气隙的磁通量：

$$\Phi_1 = \frac{E_2}{R} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h} S \tag{2.16a}$$

$$\Phi_2 = \frac{E_1 + E_2}{R} = \frac{\mu_0 \left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)}{h} S \tag{2.16b}$$

因此可得磁感应强度和磁场强度：

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h} \quad H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{N_1 I_1}{h} \tag{2.17a}$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S} = \frac{\mu_0 \left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)}{h} \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)}{h} \tag{2.17b}$$

(b) 将两个线圈分开看待，线圈 1 在自身中产生的磁通为 $\frac{2\mu_0 N_1 I_1}{h} S$ ，线圈 2 在自身中产生的磁通为 $\frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} S$ ，则它们的自感分别为（要乘上自身的匝数得到全磁通）：

$$L_1 = \frac{2\mu_0 N_1^2}{h} S \tag{2.18a}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_1^2}{h} S \tag{2.18b}$$

并且线圈 2 在线圈 1 中产生的磁通为 $\frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} S$ ，则互感为（也要乘上线圈 1 的匝数）：

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{h} S \tag{2.19}$$

(c) 求上下铁芯之间的引力，可用静磁压强公式：

$$F = w_m S = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 S = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1^2 S^2}{2h^2} \tag{2.20}$$

另外也可以用磁荷观点以及电磁类比得到同样的结果，不再赘述.

6. 本题就是证明基本结论，在任意一本教科书上都能找到答案，在此略去.