中国科学技术大学电动力学期中考试试题卷（2025）

参考解答

作者：刘元彻，刘宇航，杨焕雄

时间：20250517-18

提示：

- 闵氏空间$\mathbb{M}_4$中洛伦兹推动变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$的非零矩阵元是：

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma,\ \ \Lambda^0{}_j = -\gamma\beta_j,\ \ \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i,\ \ \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \tag{1}$$

  式中$\beta = \beta^i \mathbf{e}_i$为无量纲的牵连速度，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

- 电磁场强度在洛伦兹变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$下的变换法则是：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma\mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\beta\cdot\mathbf{E})\beta + \gamma c\,\beta\times\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \gamma\mathbf{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\beta\cdot\mathbf{B})\beta - \frac{\gamma}{c}\,\beta\times\mathbf{E}\end{aligned} \tag{2}$$

- Heaviside阶梯函数$\Theta(s)$定义为：

$$\Theta(s) = \begin{cases} 0, & s \le 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases} \tag{3}$$

  其满足的一个重要性质是$\dfrac{\mathrm{d}\Theta(s)}{\mathrm{d}s} = \delta(s)$，此处$\delta(s)$是Dirac戴尔塔函数.

- 球坐标系中的散度、旋度公式分别是：

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{r^2\sin\theta} = \nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_\theta}{r\sin\theta} = \nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_\phi}{r} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{e}_r = \nabla\times\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = \nabla\times\frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta} = 0 \tag{4}$$

简答（40分，每题10分）：

1. 用狭义相对论基本原理，简述为什么一个光子不能衰变成两个电子（5分）或者两个运动方向不共线的光子（5分）？

解答：

- 不计引力效应时，凡是有光子参与的过程必是电磁相互作用过程，其必然遵从4-动量守恒定律。倘若一个光子能通过电磁相互作用转变为两个电子，$p^\mu_\gamma = p^\mu_{e_1} + p^\mu_{e_2}$. 因为光子是零质量粒子而电子的静止质量$m > 0$，$p^\mu_\gamma$是类光4-矢量，$p^\mu_{e_1}$和$p^\mu_{e_2}$是类时4-矢量。两个类时4-矢量相加是不可能得到类光4-矢量的，

$$\begin{aligned}0 = p^2_\gamma = p^\mu_\gamma p_{\mu,\gamma} &= (p^\mu_{e_1} + p^\mu_{e_2})(p_{\mu,e_1} + p_{\mu,e_2}) \\ &= p^2_{e_1} + p^2_{e_2} + 2p^\mu_{e_1}p_{\mu,e_2} \\ &= -2m^2c^2 - 2mE_2\end{aligned} \tag{5}$$

  式中E_2是电子e_2在电子e_1自身系中的能量，$p^0_{e_2} = -p_{0,e_2} = E_2/c$，$E_2 > 0$. 显然(5)式存在明显的逻辑矛盾，从而相应的4-动量守恒定律不成立。换言之，$p^\mu_\gamma \ne p^\mu_{e_1} + p^\mu_{e_2}$. 所以，一个光子不能衰变成两个电子。

- 电磁场不存在自相互作用(电磁作用体系的拉氏密度中不存在电磁势高次幂的项)，所以，光子是不能衰变为两个新光子的。即使没有从动力学角度认识到这一点，仅仅从4-动量守恒定律的破缺也能得到同样的结论。设$\gamma \to \gamma_1 + \gamma_2$遵从4-动量守恒定律：$p^\mu_\gamma = p^\mu_{\gamma_1} + p^\mu_{\gamma_2}$. 因为光子的4-动量是类光4-矢量，

$$\begin{aligned} 0 = p^2_\gamma = p^\mu_\gamma p_{\mu,\gamma} &= (p^\mu_{\gamma_1} + p^\mu_{\gamma_2})(p_{\mu,\gamma_1} + p_{\mu,\gamma_2}) \\ &= p^2_{\gamma_1} + p^2_{\gamma_2} + 2p^\mu_{\gamma_1} p_{\mu,\gamma_2} \\ &= 2p^\mu_{\gamma_1} p_{\mu,\gamma_2} \end{aligned} \tag{6}$$

现在需要计算4-标量$p^\mu_{\gamma_1} p_{\mu,\gamma_2}$. 因为光子在任一惯性系里的速度都是$c$，不存在光子的自身参考系。我们可以随意选择一个惯性系计算这个4-标量。题设两个出射的光子运动方向不共线，那么必然存在一个惯性参考系Σ，在其中$\boldsymbol{p}_{\gamma_1} \perp \boldsymbol{p}_{\gamma_2}$. 所以，

$$p^\mu_{\gamma_1} p_{\mu,\gamma_2} = -\frac{\hbar^2}{c^2}\omega_1\omega_2 < 0 \tag{7}$$

ω_1和ω_2是Σ系中的观测者测量到的二出射光子的频率。显然，(6)、(7)两式是冲突的，衰变过程$\gamma \to \gamma_1 + \gamma_2$并不遵守4-动量守恒，所以它是虚构的，并不能实际发生。

2. 带电粒子q在外电磁场中运动时受到Lorentz力$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$的作用，其中$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$分别是电磁场的电场强度和磁感应强度，$\mathbf{u}$是粒子的三维速度。倘若按

$$f_\mu = qF_{\mu\nu}U^\nu \tag{8}$$

定义4维电磁力矢量，式中约定$F_{\mu\nu}$是电磁场张量，$U^\nu = \gamma_u(c,\ \mathbf{u})$是带电粒子的四维速度，请计算4维标量$f_\mu U^\mu$的值（5分）并写出$f_\mu$之时间分量$f_0$的物理内涵（5分）。

解答:

- 值为0. 证明这一点的关键是注意到：

$$f_\mu U^\mu = qF_{\mu\nu}U^\nu U^\mu \tag{9}$$

这里$F_{\mu\nu}$是关于μ, ν反对称的，$U^\nu U^\mu$是关于μ, ν对称的，所以缩并得到0.

- 时间分量也就是：

$$f_0 = qF_{0\nu}U^\nu = qF_{0i}U^i = -\frac{q}{c}\gamma_u \mathbf{E}\cdot\mathbf{u} \tag{10}$$

根据协变形式的Lorentz力公式，$\frac{\partial p^\mu}{\partial \tau} = f^\mu$，(10)式可改写为$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}$. 这个公式显然应该被诠释为电场力对带电粒子$q$做功的功率。这就是$f_0$的物理内涵。

3. 标量场ϕ的Sine-Gordon模型拉氏密度可表为：

$$\mathscr{L}_{SG} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - 2\sin^2\frac{\phi}{2} \tag{11}$$

写出由此拉氏密度确定的拉氏方程(5分)。拉氏方程是否具有洛伦兹变换下的协变性(5分)?

解答:

- 欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{SG}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{SG}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \tag{12}$$

代入计算可得运动方程为：

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi - \cos\phi = 0 \tag{13}$$

- 尽管运动方程中有$\cos\phi$这样的函数（因此ϕ的方程不是线性微分方程），但ϕ作为标量场，并不破坏方程的协变性。$\partial^\mu\partial_\mu$作为指标完全缩并的表达式也不破坏协变性。所以拉氏方程**具有**洛伦兹变换下的协变性。

4. 电磁场的Maxwell方程形式在洛伦兹变换下保持不变。三维的旋转变换群$SO(3)$是洛伦兹变换群$SO(1,3)$的一个子群（即洛伦兹变换中包含三维旋转变换），这是否意味着任何一个电磁场都在三维旋转变化下保持不变？如果是，请简要说明；如果不是，请举出反例（10分）。

解答:

- 不是。请注意方程如果具有某个对称性下**方程形式的不变性**，不代表**方程的解也具有相应的不变性**！
- 三维空间中的匀强电场显然不是旋转不变的。事实上任何一个非球对称的电场都不是$SO(3)$变换下不变的。

计算（60分，每题15分）：

5. 电动力学中也存在Birkhoff定理。设Ω为半径为a的球面包围的区域，Ω中存在着球对称的电荷电流分布，

$$\varrho(t,\mathbf{r})=\varrho(t,r)\Theta(a-r),\qquad \mathbf{j}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}_r j(t,r)\Theta(a-r) \tag{14}$$

特别地，$\varrho(t,a)=j(t,a)=0$. Maxwell方程组的球对称性意味着此电荷电流激发的电磁场强度分布必然也具有球对称性，$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}_r f(t,r)$，$\mathbf{B}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}_r g(t,r)$. Birkhoff定理断言，此电荷电流分布在$\Omega$之外的空间中激发的电磁场是静电库仑场：

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\frac{Q\mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2},\qquad \mathbf{B}(t,\mathbf{r})=0,\qquad a<r<\infty \tag{15}$$

式中$Q=\int_\Omega \varrho(t,r)\mathrm{d}^3x$是$\Omega$中存在的电荷总量，$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$. 请验证此Birkhoff定理的内容。

解答:

支配经典电动力学的运动方程是Maxwell方程组$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-J^\nu$. 恢复国际单位制，用三矢量$(\mathbf{E},\mathbf{B})$表达为：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}=\dfrac{\varrho}{\epsilon_0}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\Big(\mathbf{j}+\epsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\Big)\end{cases}$$

在Ω外没有电荷电流分布，故而两个旋度方程化简为对称的形式：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{16}$$

带入球对称场的形式$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}_r f(t,r)$，$\mathbf{B}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}_r g(t,r)$，根据矢量旋度表达式$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{e}_r=0$, 我们有：

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\partial_t\boldsymbol{B}\\ &=\boldsymbol{\nabla}\times\big[\boldsymbol{e}_r f(t,r))\big]+\partial_t\boldsymbol{B}\\ &=\big[\boldsymbol{\nabla}f(t,r)\big]\times\boldsymbol{e}_r+\partial_t\boldsymbol{B}=\left[\frac{\partial f(t,r)}{\partial r}\right]\big(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_r\big)+\partial_t\boldsymbol{B}=\partial_t\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{17}$$

同理，

$$
\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0\epsilon_0\partial_t \boldsymbol{E} \\
&= \boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{e}_r g(t,r)\right)\right] - \mu_0\epsilon_0\partial_t \boldsymbol{E} \\
&= \left[\boldsymbol{\nabla} g(t,r)\right] \times \boldsymbol{e}_r - \mu_0\epsilon_0\partial_t \boldsymbol{E} = \left[\frac{\partial g(t,r)}{\partial r}\right]\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r\right) - \mu_0\epsilon_0\partial_t \boldsymbol{E} = -\mu_0\epsilon_0\partial_t \boldsymbol{E}
\end{aligned} \tag{18}
$$

因而在Ω以外的区域，电场强度与磁感应强度分布均不随时间改变：

$$
\partial_t \boldsymbol{E} = \partial_t \boldsymbol{B} = 0 \tag{19}
$$

考虑Maxwell方程组中两个散度方程的积分形式：

$$
\oint_{\partial V} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = Q/\epsilon_0, \qquad \oint_{\partial V} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \tag{20}
$$

其中区域V取为半径为$r > a$的球形区域，边界∂V为半径为r的球面。带入球对称的解即可解出：

$$
\boldsymbol{E} = \frac{Q\boldsymbol{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int_\Omega \varrho(t,r)\mathrm{d}^3x, \qquad \boldsymbol{B} = 0, \qquad\qquad a < r < \infty \tag{21}
$$

那么，(21)式与(19)式之间是否逻辑自洽呢？换句话说，$Q = \int_\Omega \varrho(t,r)\mathrm{d}^3x$是否随时间改变？根据电荷守恒定律，

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_t\varrho(t,\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) \\
&= \partial_t\left[\varrho(t,r)\Theta(a-r)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\boldsymbol{e}_r j(t,r)\Theta(a-r)\right] \\
&= \left[\partial_t\varrho(t,r)\right]\Theta(a-r) + \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left[r^2\sin\theta\, j(t,r)\Theta(a-r)\right] \\
&= \left[\partial_t\varrho(t,r)\right]\Theta(a-r) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\, j(t,r)\Theta(a-r)\right] \\
&= \left[\partial_t\varrho(t,r) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 j\right)\right]\Theta(a-r) - j(t,r)\delta(r-a) \\
&= \left[\partial_t\varrho(t,r) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 j\right)\right]\Theta(a-r)
\end{aligned} \tag{22}
$$

最后一步利用了恒等式$j(t,r)\delta(r-a) = j(t,a)\delta(r-a) = 0$. 因此，

$$
\partial_t\varrho(t,r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 j\right), \qquad 0 < r < a \tag{23}
$$

进而，

$$
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \partial_t\varrho(t,r)\mathrm{d}^3x = -4\pi\int_0^a \mathrm{d}\left[r^2 j(t,r)\right] = -4\pi a^2 j(t,a) = 0 \tag{24}
$$

这样就确证了(21)式给出的$\boldsymbol{E}$确为静电库仑场。 至此验证了Birkhoff定理的全部内容。

注记：该定理向我们展示了一个有趣的事实，那便是球对称的电荷分布一定激发出库伦静电场，哪怕有（球对称的）电荷流动；换一句话说，球对称的电荷构型不可能向外辐射电磁波。引力中有一个相同名称的定理，内容是球对称的真空引力解一定是不随时间变化的Schwarzschild解的形式。

6. 电磁场张量$F_{\mu\nu}$的物理内涵是：

$$
F^{0i} = \frac{1}{c}E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk}B_k \tag{25}
$$

其中$\mathbf{E} = E^i\mathbf{e}_i$和$\mathbf{B} = B^i\mathbf{e}_i$分别是3维电场强度矢量与磁感应强度矢量。

- 定义对偶电磁场张量$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$是四维Minkowski空间中的全反对称张量。证明$G^{\mu\nu}$在电磁对偶变换：

$$
\mathbf{E}\ \to \mathbf{E}' = -c\mathbf{B}, \qquad \mathbf{B}\ \to \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{E}}{c} \tag{26}
$$

下变回电磁场张量，即$G^{\mu\nu} \to G'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$.

- 请问真空中无源区域内的Maxwell方程组在电磁对偶变换下会发生怎样的改变？

解答：

- 要证明这一点，我们可以用课后习题中的方法，先写出电磁对偶张量G的物理内涵：
  如果取$\mu,\nu=0,i$，4阶反对称张量因0恰好处在恰当位置，会退化为3阶反对称张量（后两个指标也不能取0）：

$$\begin{aligned} G^{0i} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}g^{il}\varepsilon_{ljk}F^{jk} \\ &= B^i \end{aligned} \tag{27}$$

  如果取$\mu,\nu=i,j$，容易知道后面两个指标必有一为0。我们可以将其合并：

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k}+\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}F_{k0} \\ &= \varepsilon^{0ijk}F_{0k} \\ &= \varepsilon^{ijk}F_{0k} \\ &= -\frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}E_k \end{aligned} \tag{28}$$

  这就证明了我们想要的对偶电磁张量。（注：有同学关心这里的记号问题，例如ε^{0ijk}和ε^{ijk}之间究竟是否需要添加负号。这实际上取决于不同的符号约定，即使用两种约定的人都存在，具体解释我们会在评讲试卷的习题课上说明）. 对这个电磁场做电磁对偶变换，立刻发现G变回了F，这就是我们要证明的结论。

- 我们至少有三种方法说明Maxwell方程**保持不变**：

  1. 直接写出真空无源区域的Maxwell方程组，马上就可以发现电磁对偶变换下描写电和磁的方程分别变为对方；
  2. 指出真空无源区域的拉格朗日密度$\mathcal{L}\sim F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, 在电磁对偶变换下变为$\mathcal{L}'\sim G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$，但其关于$\mathbf{E},\mathbf{B}$是不变的。因此，拉格朗日量保持不变，从而运动方程（Maxwell方程）也不变；
  3. 指出虽然电磁对偶变换下$G^{\mu\nu}$和$F^{\mu\nu}$互换，但是从两者出发推导运动方程的表达式都是：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu G^{\mu\nu}=0 \tag{29}$$

  这给出两个运动方程，而另外两个运动方程来自Bianchi恒等式，两者依然有相同的形式：

$$\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\rho F_{\mu\nu}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu G_{\nu\rho}+\partial_\nu G_{\rho\mu}+\partial_\rho G_{\mu\nu}=0 \tag{30}$$

  而我们在课堂上已经指出，电磁对偶张量也可以给出与电磁场张量同样的运动方程，所以电磁对偶变换下Maxwell方程组保持不变。

7. 考虑一个散射过程$A+B\to C+D$. 入射过程中，粒子A和B的4-动量标记为p_A^μ和p_B^μ，质量标记为m_A和m_B。相应地，出射粒子C和D的4-动量标记为p_C^μ和p_D^μ，质量标记为m_C和m_D.
   - 证明$s=-(p_A+p_B)^2\equiv-\eta_{\mu\nu}(p_A^\mu+p_B^\mu)(p_A^\nu+p_B^\nu)$是质心能量的平方。
   - 如果我们类似地定义$t=-(p_A-p_C)^2$和$u=-(p_A-p_D)^2$，证明$s+t+u$是一个常数，并求出这个常数的值。
   - 假设$m_A=m_C, m_B=m_D$，利用s,t和粒子质量来表达散射角θ的余弦值（散射角被定义为3-动量$\mathbf{p}_A$和$\mathbf{p}_C$的夹角）。

解答：

- 为了记号简洁，本题中取$c=1$的单位制，并且把粒子i的4-动量p_i和粒子j的4-动量p_j之间的标积记为：

$$p_i\cdot p_j\equiv\eta_{\mu\nu}p_i^\mu p_j^\nu=-E_iE_j+\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j \tag{31}$$

粒子i的能量动量关系式就是$p_i\cdot p_i=-E_i^2+\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_i=-m_i^2$.

倘若两个粒子A与B的4-动量在实验室系中分别为p_A与p_B，而在质心系中分别为p'_A与p'_B，由于(31)式定义的4-动量标积是一个4-标量，故必然有：

$$\begin{aligned}&p_A\cdot p_A=p'_A\cdot p'_A,\\&p_B\cdot p_B=p'_B\cdot p'_B,\\&(p_A+p_B)\cdot(p_A+p_B)=(p'_A+p'_B)\cdot(p'_A+p'_B)\end{aligned} \tag{32}$$

注意到$(p'_A+p'_B)$是质心系中二粒子体系的4-动量，

$$p_A'^\mu+p_B'^\mu=(E_{CMr},\ \mathbf{0}) \tag{33}$$

故质心系中体系的总能量E_{CMr}服从关系式：

$$E_{CMr}^2=-(p'_A+p'_B)\cdot(p'_A+p'_B)=-(p_A+p_B)\cdot(p_A+p_B)=s \tag{34}$$

(34)式即为所要证明的结论。

- 碰撞过程$A+B\to C+D$遵从4-动量守恒定律，

$$p_A+p_B=p_C+p_D \tag{35}$$

从而题设的三个4-标量之和为：

$$\begin{aligned}s+t+u&=-\left[(p_A+p_B)^2+(p_A-p_C)^2+(p_A-p_D)^2\right]\\&=-\left[p_A^2+p_B^2+p_A^2+p_C^2+p_A^2+p_D^2+2p_A\cdot p_B-2p_A\cdot p_C-2p_A\cdot p_D\right]\\&=3m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2-2p_A\cdot p_B+2p_A\cdot(p_C+p_D)\\&=3m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2-2p_A\cdot p_B+2p_A\cdot(p_A+p_B)\\&=m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2\end{aligned} \tag{36}$$

这就证明了$s+t+u$是一个守恒量。(36)式定义的守恒量称为Mandelstam变量，它广泛地应用于粒子物理学的散射问题中。

- 现在质心系中研究碰撞过程$A+B\to C+D$. 为方便计，我们省略前面给质心系中物理量所加的撇号标记。所谓质心系，更准确地说应该是动量中心系，即在碰撞前体系的3-动量等于零：$\boldsymbol{p}_A+\boldsymbol{p}_B=0$. 碰撞过程遵从4-动量守恒定律，因此在质心系中，

$$\begin{aligned}&E_A+E_B=E_C+E_D\\&\mathbf{p}_A=-\mathbf{p}_B\\&\mathbf{p}_C=-\mathbf{p}_D\end{aligned} \tag{37}$$

其中$E_i=\sqrt{m_i^2+|\mathbf{p}_i|^2}$. (31)式暗示质心系中各粒子的3-动量大小相等，即
$|\mathbf{p}_A|=|\mathbf{p}_B|=|\mathbf{p}_C|=|\mathbf{p}_D|\equiv\xi$. 若进一步$m_A=m_C$和$m_B=m_D$，则在质心系中
$E_A=E_C=\sqrt{m_A^2+\xi^2}$. Mandelstam变量$t$(4-标量)的值可以在质心系中方便地求出：

$$\begin{aligned}t&=-(p_A-p_C)^2\\&=-\left[-(E_A-E_C)^2+(\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_C)^2\right]\\&=-(\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_C)^2\\&=-\mathbf{p}_A^2-\mathbf{p}_C^2+2\mathbf{p}_A\cdot\mathbf{p}_C\\&=-2\xi^2(1-\cos\theta)\end{aligned} \tag{38}$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
s &= -(p_A + p_B)^2 \\
&= -\left[-(E_A+E_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2\right] \\
&= (E_A+E_B)^2 \\
&= m_A^2 + m_B^2 + 2\xi^2 + 2\sqrt{m_A^2+\xi^2}\,\sqrt{m_B^2+\xi^2}
\end{aligned} \tag{39}
$$

从(39)式可以解出：

$$
\xi^2 = \frac{2(m_A^4 + m_B^4 + s^2) - (m_A^2 + m_B^2 + s)^2}{4s} \tag{40}
$$

把(40)式代回到(38)式，可以解得：

$$
\cos\theta = 1 + \frac{2st}{2(m_A^4 + m_B^4 + s^2) - (m_A^2 + m_B^2 + s)^2} \tag{41}
$$

8. 考虑由如下拉氏密度定义的复标量场理论：

$$
\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - U(\phi) \tag{42}
$$

其中，$\phi(x)$和$\phi^*(x)$互为复共轭。记$|\phi|^2 = \phi\phi^*$表示场的模方，势能项被指定为：

$$
U(\phi) = m^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}g^2|\phi|^4 \tag{43}
$$

式中m称为复标量场$\phi(x)$的质量参数，g则是复标量场自作用的耦合参数，约定m和g均为常数且$g > 0$。

- 证明，复标量场的拉氏密度具有相位变换

$$
\phi(x) \to \phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(x), \qquad \phi^*(x) \to \phi^{*\prime}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\phi^*(x) \tag{44}
$$

  下的不变性（其中α是一个与时空坐标x^μ无关的实常数）。

- 在$m^2 < 0$和$m^2 > 0$的情况下，分别确定使得势能$U(\phi)$取最小值时$|\phi|^2$的取值v^2。这种能量最小值点被称为理论的真空态（作为检验，你求解的v应该是非负实数）。

- 现在考虑$m^2 < 0$的情形，为了计算方便我们令$\mu^2 = -m^2 > 0$. $|\phi|^2 = v^2$的复数解ϕ分布在复平面的一个圆环上，这意味着理论有无穷个真空。实际物理过程中，物理态只能落到其中一个真空上，因此我们的理论必须人为选择一个点作为真空。出于计算方便，选取$\phi = \phi^* = v$作为真空，并在真空附近将拉格朗日量展开。具体来说，我们作如下的变换：

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &\to v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\chi(x) \\
\phi^*(x) &\to v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\chi(x)
\end{aligned} \tag{45}
$$

  式中$\varphi(x), \chi(x)$都是实标量场。请计算这个变换后拉格朗日量的形式。在这一问的结果中，你可以保留v，不需要将上一问中求解的v具体表达式带回。

- 在上一小问计算出的拉格朗日量中，将含有形如$\frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2$的项，$m_\varphi$被定义为$\varphi$场（对应粒子）的质量。请用$\mu, g$来表示$m_\varphi$，它对应一个有质量实标量场。作为检验，你计算出的拉格朗日量中不应该含有形如$\frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2$的项，这意味着$\chi$对应一个无质量标量粒子。

在$m^2 < 0$时，原本带着质量的复标量场会分解成一个带质量的实标量场和一个不带质量的实标量场，后者被称为Nambu-Goldstone玻色子。在凝聚态物理中，相变临界点处会产生从$m^2 > 0$到$m^2 < 0$的转变——这种现象被称为对称性自发破缺，2008年Nambu因为这一发现获得了诺贝尔物理学奖。

解答:

- 由于α是常数，所以导数算符并不作用在$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$上。故:

$$\phi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(x), \quad \phi^*(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\phi^*(x), \quad \partial_\mu\phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\partial_\mu\phi, \quad \partial^\mu\phi^* \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\partial^\mu\phi^* \tag{46}$$

  将这些变换带入，自然发现拉格朗日量保持不变。

- 对$m^2 > 0$:

$$U = m^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}g^2|\phi|^4 \tag{47}$$

  关于$|\phi|^2$是单调的(因为复数的模方不可能小于0)，故$|\phi|^2 = v^2 = 0$时取势能最小值。对$m^2 < 0$：取$\mu^2 = -m^2 > 0$,

$$U = -\mu^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}g^2|\phi|^4 \tag{48}$$

  根据二次函数的知识知道当$|\phi|^2 = \dfrac{\mu^2}{g^2} = -\dfrac{m^2}{g^2}$时取最小值，从而$v = \dfrac{\mu}{g}$.

- 逐项讨论。对于动能项，做变换后:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\varphi + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_\mu\chi \\ \partial^\mu\phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu\varphi - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial^\mu\chi \end{aligned} \tag{49}$$

  从而:

$$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) \to \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \tag{50}$$

  对于势能项，我们可以先计算ϕ的模方:

$$|\phi|^2 = (v + \frac{\varphi}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{\chi}{\sqrt{2}})^2 = v^2 + \sqrt{2}v\varphi + \frac{\varphi^2 + \chi^2}{2} \tag{51}$$

  带回势能然后完全展开，得到:

$$\begin{aligned} U(\phi) = -\mu^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}g^2|\phi|^4 &= \frac{1}{2}g^2(|\varphi|^2 - v^2)^2 + \frac{\mu^4}{2g^2} \\ &\to \frac{1}{2}g^2(\sqrt{2}v\varphi + \frac{\varphi^2 + \chi^2}{2})^2 + \frac{\mu^4}{2g^2} \\ &= g^2v^2\varphi^2 + \frac{g^2v}{\sqrt{2}}\varphi(\varphi^2 + \chi^2) + \frac{g^2}{8}(\varphi^2 + \chi^2)^2 + \frac{\mu^4}{2g^2} \end{aligned} \tag{52}$$

  所以拉格朗日量变为:

$$\mathcal{L}'(\varphi, \chi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \left[g^2v^2\varphi^2 + \frac{g^2v}{\sqrt{2}}\varphi(\varphi^2 + \chi^2) + \frac{g^2}{8}(\varphi^2 + \chi^2)^2 + \frac{\mu^4}{2g^2}\right] \tag{53}$$

- 可以从中读出两个标量场对应的动力学:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2, \qquad \mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}gv)^2\varphi^2 \tag{54}$$

  于是读出$m_\chi = 0, \quad m_\varphi = \sqrt{2}gv = \sqrt{2}\mu$，分别对应无质量和有质量场。