# 中国科学技术大学电动力学期终考试试题卷(2025)

**姓名：**

**学号：**

**成绩： 参考解答**

## 提示：

- 由电磁场张量$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$出发可以构造出闵氏空间$\mathbb{M}_4$中两个著名的4-标量：

  $$I_2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \qquad \tilde{I}_2 = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

  $F_{\mu\nu}$的物理内涵是：

  $$F_{0i} = -E_i/c, \qquad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k$$

  因此，

  $$I_2 = 2\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right), \qquad \tilde{I}_2 = -\frac{4}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$$

- 3维欧氏空间$\mathbb{E}_3$中存在着矢量分析恒等式$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}$，以及：

  $$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{r} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

  式中$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$为场点相对于坐标原点的位置矢量.

- Lorenz规范下无界空间中的推迟势：

  $$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x' \,\frac{\rho(t-r/c,\boldsymbol{x}')}{r}, \qquad \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3x' \,\frac{\boldsymbol{j}(t-r/c,\boldsymbol{x}')}{r}$$

  其中$t'$是隐函数方程$t' = t - r(t')/c$的解. 在远场区，分布在小区域($L\sim\sqrt[3]{V}$)中的交变电流($k=\omega/c$)激发的推迟矢势的近似表达式为：

  $$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\,\dot{\boldsymbol{p}} - i\frac{\mu_0 k\, e^{ikR}}{4\pi R^2}\left(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x} + \frac{1}{6}x_i\boldsymbol{e}_k\dot{\widetilde{\mathscr{D}}}^{ik}\right) + \mathscr{O}\big((kL)^2\big)$$

  式中$R = |\boldsymbol{x}|$. 电荷电流体系的多极矩分别是：

  $$\boldsymbol{p} = \int_V \mathrm{d}^3x' \,\rho(t,\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}', \qquad \widetilde{\mathscr{D}}_{ij} = 3\int_V \mathrm{d}^3x' \,x'_i x'_j \rho(t,\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x' \boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}').$$

- 设电荷电流分布在区域$V$中，$S=\partial V$是$V$的边界面，则存在如下普适的电磁学恒等式：

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\Big[f(t,\boldsymbol{r})g(t,\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})\Big]=0$$

式中$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})$是电流密度矢量，$f(t,\boldsymbol{r})$与$g(t,\boldsymbol{r})$是两个任意的标量函数.

- 设粒子在轨道$\boldsymbol{x}'(t')$上以速度$\boldsymbol{v}(t')=\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t')/\mathrm{d}t'$运动。倘若场点$(\boldsymbol{x},t)$与$(\boldsymbol{x}'(t'),t')$间隔类光，即

$$t'=t-\frac{1}{c}\Big|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')\Big|$$

则$t'$成为场点$(\boldsymbol{x},t)$时空坐标的隐函数，$t'=t'(\boldsymbol{x},t)$. 由此可证明：

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r},\qquad \boldsymbol{\nabla}t'=-\frac{\boldsymbol{e}_r/c}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r}$$

式中$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}(t')/c$是粒子的无量纲速度，$\boldsymbol{e}_r$是3-矢量$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')$方向的单位矢量.

- 正交曲线坐标系中基矢的性质：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\right)=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\epsilon_{ijk}\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_jh_k}\right)=0$$

这里不使用Einstein求和约定，$h_i$是拉梅系数. 在柱坐标系$(\rho,\phi,z)$中，$h_\rho=1,\ h_\phi=\rho,\ h_z=1.$

- 利用狄拉克delta函数，函数$f(\boldsymbol{x})$可以表达为体积分：

$$f(\boldsymbol{x})=\int \mathrm{d}^3y\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})$$

- 在3维欧氏空间$\mathbb{E}_3$中，我们默认使用$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$表示整体笛卡尔直角坐标系的单位基矢，

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},\quad \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

球坐标系基矢与笛卡尔直角坐标系基矢之间的关系可表为：

$$\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_1\sin\phi+\boldsymbol{e}_2\cos\phi,\qquad \boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_3\cos\theta+\boldsymbol{e}_1\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\sin\theta\sin\phi,$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_3\sin\theta+\boldsymbol{e}_1\cos\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\cos\theta\sin\phi$$

或者等价地，

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta,\qquad \boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi,$$
$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$$

## 简答(40分)：

**本提的各小题中除证明题，不必写出步骤。 证明题需要写出关键性步骤(伪证不得分)。**

1. 相对论性粒子的固有时$\mathrm{d}\tau$是一个4-标量，请证明它可以表达为：

$$\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{c^2}U_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

   式中$U_\mu$和$\mathrm{d}x^\mu$分别为粒子的4-速度与4-位移。

证：

注意到$U^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$, 我们有：

$$\mathrm{d}x^\mu=U^\mu \mathrm{d}\tau$$

将上式两端分别与$U_\mu$缩并，并注意到$U_\mu U^\mu=-c^2$，可得$U_\mu \mathrm{d}x^\mu=-c^2\mathrm{d}\tau$. 所以，

$$\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{c^2}U_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

证毕。

2. 设$F^{\mu\nu}$是电磁场张量，请检验由此构造的4-标量$I_3=F^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^\lambda{}_\mu=0$.

   证：

   电磁场张量是反对称张量，$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$. 因为，

$$\begin{aligned}I_3&=F^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^\lambda{}_\mu=\eta_{\sigma\mu}F^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^{\lambda\sigma}=-\eta_{\sigma\mu}F^{\nu\mu}F_{\lambda\nu}F^{\sigma\lambda}=-F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu}F^{\nu\mu}\\&=-F^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}F^\nu{}_\mu\\&=-I_3\end{aligned}$$

   所以$I_3=0$.

3. 同上题。请把4-标量$I_4=F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}F^{\rho\sigma}F_{\sigma\mu}$用电磁场著名的两个4-标量$\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2/c^2$与$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$的组合表出.

   答：

$$I_4=2\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}-\boldsymbol{B}^2\right)^2+\frac{4}{c^2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right)^2=\frac{1}{2}I_2+\frac{1}{4}\tilde{I}_2$$

   理由如下(不要求)。引入辅助的二阶张量$G^\mu{}_\rho:=F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}$，其诸分量的物理内涵是：

$$G^0{}_0 = F^{0i}F_{i0} = E^iE_i/c^2 = \boldsymbol{E}^2/c^2,$$
$$G^0{}_j = F^{0i}F_{ij} = \epsilon_{ijk}E^iB^k/c = -\frac{1}{c}\big(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\big)_j,$$
$$G^i{}_0 = F^{ij}F_{j0} = \epsilon^{ijk}B_kE_j/c = \frac{1}{c}\big(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\big)^i,$$
$$G^i{}_j = F^{i0}F_{0j} + F^{ik}F_{kj} = E^iE_j/c^2 + \epsilon^{ikl}\epsilon_{kjm}B_lB^m = -\delta^i_j\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{c^2}E^iE_j + B^iB_j$$

因此,

$$\begin{aligned}
I_4 &= G^\mu{}_\rho G^\rho{}_\mu \\
&= \big(G^0{}_0\big)^2 + G^0{}_iG^i{}_0 + G^i{}_0G^0{}_i + G^i{}_jG^j{}_i \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2 - \frac{2}{c^2}\big(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\big)^2 + \left[2\big(\boldsymbol{B}^2\big)^2 - \frac{2}{c^2}\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{B}^2 + \frac{2}{c^2}\big(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\big)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2\right] \\
&= 2\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2 + 2\big(\boldsymbol{B}^2\big)^2 - \frac{4}{c^2}\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{B}^2 + \frac{4}{c^2}\big(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\big)^2 \\
&= 2\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} - \boldsymbol{B}^2\right)^2 + \frac{4}{c^2}\big(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\big)^2
\end{aligned}$$

倒数第二步使用了矢量代数恒等式$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$.

4. 分处于两个不同惯性参考系的甲乙两个观测者测量同一均匀电磁场的场强。观测者甲测得的电场强度和磁感应强度分别为$\boldsymbol{E} = \alpha\boldsymbol{e}_1 - \alpha\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{B} = \frac{2\alpha}{c}\boldsymbol{e}_3$，此处约定$\alpha \neq 0$. 观测者乙测得的场强分别为$\boldsymbol{E}' = 2\alpha\boldsymbol{e}_3$和$\boldsymbol{B}' = B'_x\boldsymbol{e}_1 + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{e}_2 + B'_z\boldsymbol{e}_3$. 请问$B'_x$和$B'_z$的取值分别是什么?

   答:

$$B'_x = \pm\frac{\alpha}{c}\sqrt{5}, \qquad B'_z = 0$$

5. 磁偶极子与外静磁场$\boldsymbol{B}$之间的相互作用有效势能是$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$，这里$\boldsymbol{\mu}$是磁偶极子的磁偶极矩矢量. 倘若把磁偶极子置于非均匀外磁场$\boldsymbol{B}$中，请写出外磁场施加给磁偶极子的洛仑兹力.

答:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}\big)$$

6. 矢量场$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$的横分矢量$\boldsymbol{V}_T(\boldsymbol{x},t)$具有性质：$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}_T = 0$. 给定电流密度矢量$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$，请写出无界空间中横电流密度矢量$\boldsymbol{j}_T(\boldsymbol{x},t)$的表达式.

答:

$$\boldsymbol{j}_T(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times\int \mathrm{d}^3y\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right]$$

7. 设电四极子占据坐标原点，则其电荷体密度可表为

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{6}\mathscr{D}^{ij}\partial_i\partial_j\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

式中$\mathscr{D}^{ij}$是电四极子的电四极矩。设此电四极子激发的静电场强度分布为$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，请写出$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的散度与旋度。

答：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{6\epsilon_0}\mathscr{D}^{ij}\partial_i\partial_j\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0.$$

8. 空间区域$V$中存在着时谐的电荷电流分布，$\varrho(\boldsymbol{x},t)=\varrho(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$. 现建立笛卡尔直角坐标系使得$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=j_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_i$. 请写出体积分

$$\int_V x_i j_k(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x$$

的结果.

答：

$$\int_V x_i j_k(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x=-\frac{i\omega}{6}\widetilde{\mathscr{D}}_{ik}+\epsilon_{ikl}m^l$$

式中$\widetilde{\mathscr{D}}_{ik}$和$m^l$分别是电荷电流分布的电四极矩和磁偶极矩矢量的笛卡尔直角分量。

9. 对于线电荷电流分布，电荷守恒定律表为：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial z}=0$$

这里设电荷电流沿$z$轴分布，$\lambda(z,t)$和$I(z,t)$分别是电荷线密度和电流强度。倘若$\lambda(z,t)|_{t=0}=0$，且

$$I(z,t)=I_0\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t),\qquad -a/2\le z\le a/2$$

请问此电荷电流分布的电偶极矩$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{e}_z\int_{-a/2}^{a/2}z\lambda(z,t)\mathrm{d}z=$？

答：

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{e}_z\frac{2aI_0}{\pi\omega}\sin(\omega t)=\boldsymbol{e}_z\left(\frac{2aI_0}{\pi\omega}\right)ie^{-i\omega t}$$

10. 设带电粒子在一条确定的轨道$\boldsymbol{x}'(t')$上运动，其无量纲的运动速度为$\boldsymbol{\beta}(t')=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'(t')}{\mathrm{d}t'}$. 倘若时空点$(\boldsymbol{x},t)$和$(\boldsymbol{x}'(t'),t')$通过光讯号相联系. 设$\boldsymbol{r}(t')=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')$，$r(t')=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')|=c(t-t')$是其量值. 请问单位矢量$\boldsymbol{e}_r(t')=\boldsymbol{r}(t')/r(t')$对$t'$的导数是什么?

答：

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r\equiv\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r(t')}{\mathrm{d}t'}=-\frac{c}{r}\Big[\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r\Big]$$

理由如下(不要求)。注意到$r(t')=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')|$，我们有：

$$\frac{\partial r}{\partial t'}=-c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r$$

接下来，求位置矢量$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t')=r(t')\boldsymbol{e}_r$对$t'$的导数，可得：

$$-c\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{v}(t')=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'(t')}{\mathrm{d}t'}=\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\boldsymbol{e}_r+r(t')\dot{\boldsymbol{e}}_r=-c(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r+r(t')\dot{\boldsymbol{e}}_r$$

所以，

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=-\frac{c}{r}\Big[\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r\Big]$$

## 计算(60分)：

11. 一个静磁场的矢量势在柱坐标系里表为：

$$\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)=A\big(\phi\rho\boldsymbol{e}_\rho+b\boldsymbol{e}_z\big)e^{-\rho^2/a^2}$$

式中$A$，$a$和$b$是三个常参数。

- 请问此矢量势是在什么规范里写出的？
- $\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)$和另一候选矢量势$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\rho,\phi,z)=A\big[(\phi+2\pi)\rho\boldsymbol{e}_\rho+b\boldsymbol{e}_z\big]e^{-\rho^2/a^2}$ 是否等价？
- 请求出此静磁场的磁感应强度分布.
- 激发此静磁场的电流密度矢量是什么？是稳恒电流吗？

**解：**

---

- 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)&=\boldsymbol{\nabla}\Big(A\phi\rho^2e^{-\rho^2/a^2}\Big)\cdot\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{\rho}+\boldsymbol{\nabla}\Big(Ab\rho e^{-\rho^2/a^2}\Big)\cdot\frac{\boldsymbol{e}_z}{\rho}\\&=\frac{A\phi}{\rho}\frac{\partial\big(\rho^2e^{-\rho^2/a^2}\big)}{\partial\rho}\\&=2A\phi\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)e^{-\rho^2/a^2}\end{aligned}$$

  这就是矢量势$\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)$所在的规范。显然，这不是库仑规范。

- 两个候选矢量势之差为：

$$\boldsymbol{C}(\rho,\phi,z)\equiv\widetilde{\boldsymbol{A}}(\rho,\phi,z)-\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)=2\pi A\rho e^{-\rho^2/a^2}\boldsymbol{e}_\rho$$

  因为

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{C}(\rho,\phi,z)=2\pi A\boldsymbol{\nabla}\Big(\rho e^{-\rho^2/a^2}\Big)\times\boldsymbol{e}_\rho=0$$

  这两个候选矢量势在描写静磁场方面完全等价。 事实上，

$$\boldsymbol{C}(\rho,\phi,z)=-\pi a^2A\boldsymbol{\nabla}e^{-\rho^2/a^2}=\boldsymbol{\nabla}\chi(\rho),\qquad\chi(\rho)=-\pi a^2Ae^{-\rho^2/a^2}$$

  所以，这两个候选矢势是通过规范变换相联系的。

- 磁感应强度分布为：

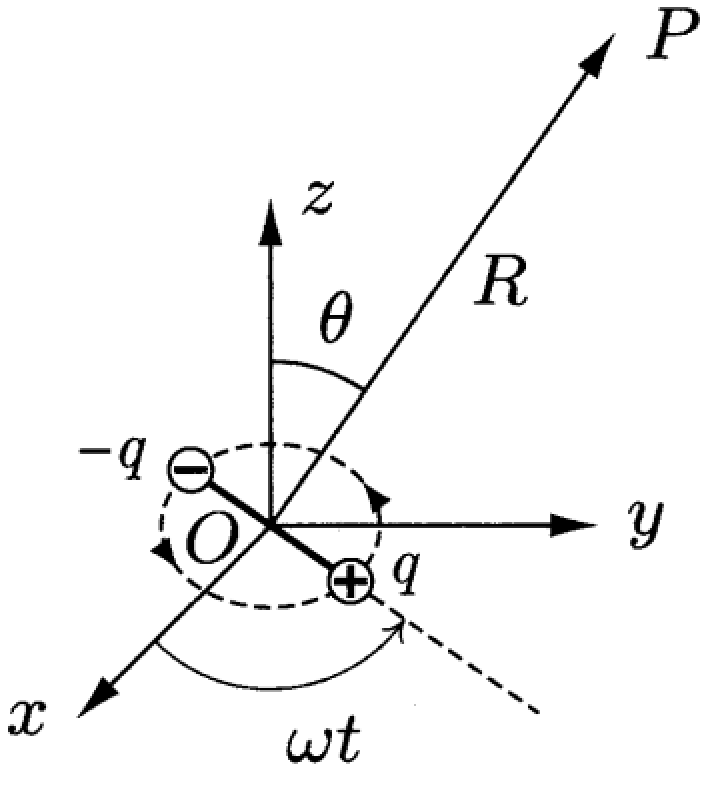
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\rho,\phi,z) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\rho,\phi,z)\\ &= A\boldsymbol{\nabla}\left(\phi\rho e^{-\rho^2/a^2}\right)\times\boldsymbol{e}_\rho + Ab\boldsymbol{\nabla}e^{-\rho^2/a^2}\times\boldsymbol{e}_z\\ &= Ae^{-\rho^2/a^2}\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_\rho - \frac{2Ab}{a^2}\rho e^{-\rho^2/a^2}\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_z\\ &= Ae^{-\rho^2/a^2}\left[\frac{2b\rho}{a^2}\boldsymbol{e}_\phi - \boldsymbol{e}_z\right]\end{aligned}$$

- 激发此磁场的电流密度矢量可能是：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\rho,\phi,z) &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\rho,\phi,z)\\ &= \frac{2Ab}{\mu_0 a^2}\boldsymbol{\nabla}\left(\rho^2 e^{-\rho^2/a^2}\right)\times\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{\rho} - \frac{A}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\left(e^{-\rho^2/a^2}\right)\times\boldsymbol{e}_z\\ &= \frac{4Ab}{\mu_0 a^2}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)e^{-\rho^2/a^2}\boldsymbol{e}_z - \frac{2A}{\mu_0 a^2}\rho e^{-\rho^2/a^2}\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

  其散度很明显为零，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\rho,\phi,z)=0$. 所以，此电流分布是稳恒电流。

12. 长度为$a$的绝缘棒两个端点各自携带一个点电荷，电量分别为$\pm q$. 现把此电荷体系平放在$xy$平面上，让其绕过绝缘棒中垂线的$z$轴以角速度$\omega$逆时针旋转。
    - 求体系的含时电偶极矩在球坐标系中的表达式。
    - 求出辐射电磁场的场强分布。
    - 计算辐射功率。




**解：**

---

- 设电偶极子的电偶极矩在$t=0$时刻沿$x$轴正方向，则

$$\boldsymbol{p}(t) = qa\Big[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\Big] = qa(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)e^{-i\omega t}$$

第二个等号采取了复数形式。转换到球坐标系，

$$\boldsymbol{p}(t) = qa\Big[\boldsymbol{e}_R\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\phi\Big]e^{i(\phi-\omega t)}$$

- Lorenz规范中，此振荡电偶极子激发的推迟矢势为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} = -i\frac{\mu_0\omega qa\, e^{ikR}}{4\pi R}\Big[\boldsymbol{e}_R\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\phi\Big]e^{i(\phi-\omega t)}$$

式中$\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{e}_R,\ k = \omega/c.$ 电偶极辐射电磁场的磁感应强度分布为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= ik\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\\ &= \frac{\mu_0\omega^2 qa\, e^{ikR}}{4\pi cR}\boldsymbol{e}_R\times\Big[\boldsymbol{e}_R\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\phi\Big]e^{i(\phi-\omega t)}\\ &= \frac{\mu_0\omega^2 qa\, e^{ikR}}{4\pi cR}\Big[\boldsymbol{e}_\phi\cos\theta - i\boldsymbol{e}_\theta\Big]e^{i(\phi-\omega t)}\end{aligned}$$

电场强度分布为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{e}_R\\ &= \frac{\mu_0\omega^2 qa\, e^{ikR}}{4\pi R}\Big[\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\phi\Big]e^{i(\phi-\omega t)}\end{aligned}$$

- 一个周期内电偶极辐射电磁场的平均能流密度矢量是：

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\Big[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x},t)\Big]\\ &= \frac{\mu_0\omega^4(qa)^2}{32\pi^2 cR^2}\mathrm{Re}\Big[(\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\phi)\times(\boldsymbol{e}_\phi\cos\theta + i\boldsymbol{e}_\theta)\Big]\\ &= \frac{\mu_0\omega^4(qa)^2}{32\pi^2 cR^2}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_R\end{aligned}$$

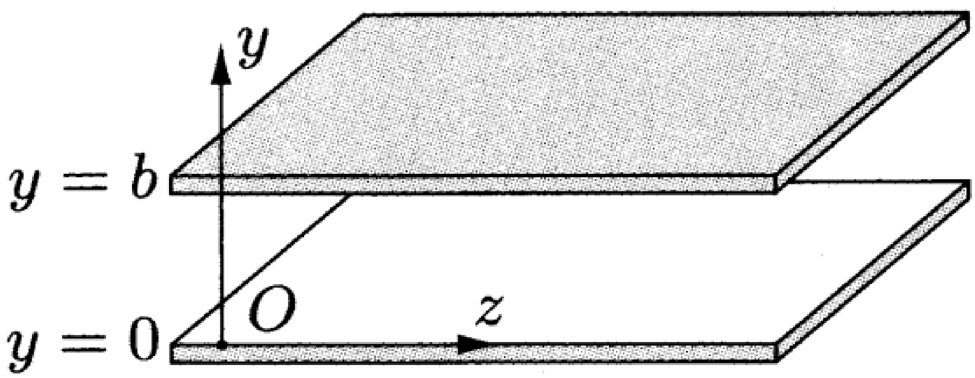
辐射功率为：

$$P = \oint\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu_0\omega^4(qa)^2}{16\pi c}\int_0^\pi(1+\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\omega^4(qa)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

13. 一对无限大的平行理想导体板，相距为$b$，电磁波沿平行于板面的$z$轴方向传播。设波在$x$轴方向是均匀的，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(y)\exp[i(k_z z-\omega t)],\qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}(y)\exp[i(k_z z-\omega t)]$$

求可能存在的$TM$模式电磁波和$TM$波模的截止频率。



**解:**

以$u(y)$代表电场强度中模式因子$\boldsymbol{E}(y)$的任一笛卡尔直角分量，它满足的亥姆赫兹方程：

$$0=\frac{\mathrm{d}^2u(y)}{\mathrm{d}y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)u(y)=\frac{\mathrm{d}^2u(y)}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2\,u(y)$$

式中

$$k_y=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2}\geq 0$$

$u(y)$的通解是：

$$u(y)=C\cos(k_yy)+D\sin(k_yy)$$

现在把$u(y)$理解为$\boldsymbol{E}(y)$的各个笛卡尔直角分量。根据Faraday电磁感应定律，$\boldsymbol{H}=\frac{i}{\mu_0\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$. 所以，

$$H_x(y)=\frac{i}{\mu_0\omega}\left[\frac{\partial E_z(y)}{\partial y}-ik_zE_y(y)\right],\quad H_y(y)=-\frac{k_z}{\mu_0\omega}E_x(y),\quad H_z(y)=-\frac{i}{\mu_0\omega}\frac{\partial E_x(y)}{\partial y}$$

$TM$模式电磁波的特点是$H_z(y)=0$，这意味着$E_x(y)=0$. 换言之，

$$\boldsymbol{E}(y)=E_y(y)\boldsymbol{e}_y+E_z(y)\boldsymbol{e}_z$$

对于$y=0$和$y=b$两个边界面而言，$E_z$是切分量，$E_y$是法分量。所以边界条件为：

$$E_z(y)\Big|_{y=0}=E_z(y)\Big|_{y=b}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}E_y(y)}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}=\frac{\mathrm{d}E_y(y)}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=b}=0$$

模式电场强度满足边界条件的解是：

$$E_y(y)=E_2\cos(m\pi y/b),\quad E_z(y)=E_3\sin(m\pi y/b),\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

导体板之间电高斯定律$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$意味着：

$$-\frac{m\pi}{b}E_2+ik_zE_3=0\qquad\rightsquigarrow\ E_3=-i\frac{m\pi}{bk_z}E_2$$

将$E_2$改写为$E_0$，导体板间$TM$模式电磁波的电场强度分布是：

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r},t)=E_0\left[\boldsymbol{e}_y\cos(m\pi y/b)-i\boldsymbol{e}_z\frac{m\pi}{bk_z}\sin(m\pi y/b)\right]e^{i(k_zz-\omega t)},\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

磁场强度分布是：

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r},t)=\frac{k_zE_0}{\mu_0\omega}\left[1+\left(\frac{m\pi}{k_zb}\right)^2\right]\cos(m\pi y/b)\,e^{i(k_zz-\omega t)}\,\boldsymbol{e}_x,\qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

注意到

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_y^2}=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-(m\pi/b)^2}$$

而模式参数$m$的最小可能取值为零，故能保证$k_z\geq 0$的截止频率为$\omega_c=0$.