

《高等量子力学》期末考试参考答案

黄翼飞^(1、2 题)，王晓^(3、4、5 题)

2025 年 6 月 28 日

1. (20 分)

(1) (6 分) 利用 Lippman-Schwinger(LS) 方程，推导散射问题一阶近似的表达式，即 Born 近似下的表达式。(可以直接使用球面波形式的格林函数。)

LS 方程为

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1)$$

采用 Born 近似和球面波形式的格林函数

$$\psi(\mathbf{x}') \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (2)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (3)$$

代入 LS 方程中，可得 (2 分)

$$\psi(\mathbf{x}) \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \quad (4)$$

因为考虑的散射势只在散射中心的小范围内有效，因此在积分内可以认为 $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ ，有近似 (2 分)

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}'|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'} \approx |\mathbf{x}| \left(1 - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad (5)$$

代入积分中可得

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &\approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'/|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \int V(\mathbf{x}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6)$$

上式中我们记 $\mathbf{k}_f = k\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $r = |\mathbf{x}|$ 。因此散射波的一阶近似表达式为 (2 分)

$$\psi_{sc}(\mathbf{x}) \approx -\frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \int V(\mathbf{x}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \quad (7)$$

(2) (7 分) 如果利用布里渊-维格纳扰动论研究同样的问题, 即从一个平面波出发给出球面波式的本征态, 讨论所遇到的发散问题的严重程度。(提示: 散射问题处于能量连续谱区域。)

布里渊-维格纳扰动论的形式如下

$$E_{\alpha}^{(n+1)} = E_k^0 + \lambda \langle k|V|\alpha^{(n)}|k|V|\alpha^{(n)}\rangle \quad (8)$$

$$|\alpha^{n+1}\rangle = |k\rangle + \frac{1}{E_{\alpha}^{(n+1)} - H_0} P \lambda V |\alpha^{(n)}\rangle \quad (9)$$

因为散射问题处于能量连续谱区域, H_0 的本征值是连续的, 并且投影算子 P 是除了选择的平面波外其余所有的态构成的空间。因此当 $E_{\alpha}^{(n+1)}$ 不是我们选取的平面波能量时, 很容易在 P 空间中找到一个 H_0 的本征态, 它的能量是 $E_{\alpha}^{(n+1)}$, 所以该扰动论很容易发散。(7 分, 言之有理即可)

(3) (7 分) 如果采用推广的布里渊-维格纳扰动论 (即半扰动论) 来讨论上述问题, 有可能避免发散问题吗? 给出你的分析和理由。

半扰动论的形式如下

$$|\alpha_P\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} (W_S)^{i-1} T |\alpha_Q\rangle + (W_S)^n |\alpha_P\rangle \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{E_{\alpha} - H_0} \lambda P_S V \quad W_S = P_S T P_S \quad (11)$$

这里投影算子的空间是人为给定的一个连续谱上的空间, 所以我们可以选择 NPT 区来避免发散问题的产生。(7 分, 言之有理即可)

2. (20 分) 对于一个自旋为 1/2 的粒子, 考虑其在二分量旋量空间中的自旋角动量。

(1) (5 分) 直接利用 Pauli 矩阵写出自旋算子的表示式。

自旋算子 (5 分, $\hbar = 1$ 的表达式也可)

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (12)$$

(2) (6 分) 在 s_z 的本征表象中, 求出升算子与降算子的矩阵表示式。

升算子为 (3 分, $\hbar = 1$ 的表达式也可)

$$s_+ = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x + i\sigma_y) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

降算子为 (3 分, $\hbar = 1$ 的表达式也可)

$$s_- = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x - i\sigma_y) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

(3) (9 分) 什么是最高权态和最低权态？在上述表象中求出它们的矩阵表示式。

如果存在 s_z 的本征态 $|a_h\rangle, |a_l\rangle$ 分别满足

$$s_+ |a_h\rangle = 0 \quad s_- |a_l\rangle = 0 \quad (15)$$

那么 $|a_h\rangle$ 被称为最高权态，而 $|a_l\rangle$ 被称为最低权态。(3 分)

最高权态的矩阵表示式为 (3 分)

$$|a_h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

最低权态的矩阵表示式为 (3 分)

$$|a_l\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

3. (20 分) 考虑下述研究退相干的模型：中心系统由一个量子比特构成，环境由 N 个量子比特构成，总哈密顿量只包含两者之间的相互作用，即， $H = H_I = H_{IS} \otimes H_{I\mathcal{E}}$ ，其中

$$H_{IS} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|,$$

$$H_{I\mathcal{E}} = \sum_{k=1}^N g_k (|\uparrow_k\rangle\langle\uparrow_k| - |\downarrow_k\rangle\langle\downarrow_k|).$$

我们考虑环境只有一个量子比特的情况，即 $N = 1$ 。

(1) (9 分) 推导约化密度矩阵随时间演化的表示式。

设初态为直积态（直积态是系统和环境发生互作用前的状态，是研究开放系统时常用的初态。本题中取任意初态均得分。）

$$|\Psi(0)\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle), \quad (18)$$

其中系数满足归一化条件 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ， $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。

量子态么正演化

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle \\ &= ae^{-iH_{IS} \otimes H_{I\mathcal{E}} t/\hbar} |\uparrow\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) + be^{-iH_{IS} \otimes H_{I\mathcal{E}} t/\hbar} |\downarrow\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \\ &= ae^{-iH_{I\mathcal{E}} t/\hbar} |\uparrow\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) + be^{iH_{I\mathcal{E}} t/\hbar} |\downarrow\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \\ &= a|\uparrow\rangle \otimes (\alpha e^{-igt/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{igt/\hbar} |\downarrow\rangle) + b|\downarrow\rangle \otimes (\alpha e^{igt/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{-igt/\hbar} |\downarrow\rangle) \\ &= a|\uparrow\rangle \otimes |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle + b|\downarrow\rangle \otimes |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle. \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle := (\alpha e^{-igt/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{igt/\hbar} |\downarrow\rangle), \quad (20a)$$

$$|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle := (\alpha e^{igt/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{-igt/\hbar} |\downarrow\rangle). \quad (20b)$$

以下计算 $|\Psi(t)\rangle$ 在系统 S 上的约化密度矩阵:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}_\mathcal{E} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \\ &= \text{Tr}_\mathcal{E} \left[|a|^2 |\uparrow\rangle |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)| \langle\uparrow| + ab^* |\uparrow\rangle |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)| \langle\downarrow| \right. \\ &\quad \left. + ba^* |\downarrow\rangle |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)| \langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)| \langle\downarrow| \right] \end{aligned} \quad (21)$$

对约化密度矩阵的各项分别求环境偏迹

$$\begin{aligned} &\text{Tr}_\mathcal{E} |\uparrow\rangle |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)| \langle\uparrow| \\ &= \langle\uparrow|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\downarrow\rangle \\ &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| (\langle\uparrow|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\downarrow\rangle) \\ &= \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle |\uparrow\rangle\langle\uparrow| = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|. \end{aligned} \quad (22a)$$

同理

$$\text{Tr}_\mathcal{E} |\uparrow\rangle |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)| \langle\downarrow| = \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = z(t) |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (22b)$$

$$\text{Tr}_\mathcal{E} |\downarrow\rangle |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)| \langle\uparrow| = \langle\mathcal{E}_\uparrow(t)|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = z^*(t) |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (22c)$$

$$\text{Tr}_\mathcal{E} |\downarrow\rangle |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)| \langle\downarrow| = \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (22d)$$

其中

$$z(t) = \langle\mathcal{E}_\downarrow(t)|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle = |\alpha|^2 e^{-i2gt/\hbar} + |\beta|^2 e^{i2gt/\hbar}. \quad (2 \text{ 分}) \quad (23)$$

代回 (21) 式可得

$$\rho_S(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + ab^* z(t) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + ba^* z^*(t) |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (3 \text{ 分}) \quad (24)$$

(2) (5 分) 将上述相互作用哈密顿量写为泡利矩阵的形式。

在自旋第三分量本征基矢上, 三个泡利矩阵有如下形式:

$$\sigma^x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (25a)$$

$$\sigma^y = -i |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (25b)$$

$$\sigma^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (25c)$$

因此相互作用哈密顿量 (只考虑 $N = 1$ 的情况也得满分。)

$$H_I = \sigma_S^z \otimes \sum_{k=1}^N (\sigma_\mathcal{E}^z)_k. \quad (26)$$

(3) (6 分) 加入系统和环境的自身哈密顿量: $H_S = \omega_S \sigma_S^z$, $H_E = \omega_E \sigma_E^z$, 总哈密顿量为 $H = H_S + H_E + H_I$ 。推导约化密度矩阵随时间演化的表示式。

仍取初态为 (18) 式中的直积态。与第 (1) 问类似

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle \\
 &= ae^{-i(\omega_S + H_E + H_I)t/\hbar} |\uparrow\rangle \otimes (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \\
 &\quad + be^{-i(-\omega_S + H_E - H_I)t/\hbar} |\downarrow\rangle \otimes (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \\
 &= ae^{-i\omega_S t/\hbar} |\uparrow\rangle \otimes [\alpha e^{-i(\omega_E + g)t/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{i(\omega_E + g)t/\hbar} |\downarrow\rangle] \\
 &\quad + be^{i\omega_S t/\hbar} |\downarrow\rangle \otimes [\alpha e^{-i(\omega_E - g)t/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{i(\omega_E - g)t/\hbar} |\downarrow\rangle] \\
 &= a |\uparrow\rangle \otimes |\mathcal{E}'_{\uparrow}(t)\rangle + b |\downarrow\rangle \otimes |\mathcal{E}'_{\downarrow}(t)\rangle. \quad (3 \text{ 分})
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$|\mathcal{E}'_{\uparrow}(t)\rangle := e^{-i\omega_S t/\hbar} [\alpha e^{-i(\omega_E + g)t/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{i(\omega_E + g)t/\hbar} |\downarrow\rangle], \tag{28a}$$

$$|\mathcal{E}'_{\downarrow}(t)\rangle := e^{i\omega_S t/\hbar} [\alpha e^{-i(\omega_E - g)t/\hbar} |\uparrow\rangle + \beta e^{i(\omega_E - g)t/\hbar} |\downarrow\rangle]. \tag{28b}$$

后续求约化密度矩阵的过程与第 (1) 问中相同, 最后得到

$$\rho'_S(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + ab^* z'(t) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + ba^* z'^*(t) |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \tag{29}$$

其中

$$z'(t) = \langle \mathcal{E}'_{\downarrow}(t) | \mathcal{E}'_{\uparrow}(t) \rangle = e^{-i2\omega_S t/\hbar} (|\alpha|^2 e^{-i2gt/\hbar} + |\beta|^2 e^{i2gt/\hbar}). \quad (3 \text{ 分}) \tag{30}$$

4. (20 分)

(1) (10 分) 证明下述 (被用于描述正电子的) 平面波是 Dirac 方程的解,

$$\psi(x) = V(p)e^{ipx}, \quad V^{(r)}(p) = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{\sqrt{2m(m+E)}} V^{(r)}(m, \mathbf{0}).$$

狄拉克方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (3 \text{ 分}) \tag{31}$$

将平面波波函数代入方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = (-\gamma^\mu p_\mu - m) (-\gamma^\nu p_\nu + m) \frac{V^{(r)}(m, \mathbf{0})}{\sqrt{2m(m+E)}} e^{ipx}. \quad (3 \text{ 分}) \tag{32}$$

式中

$$\begin{aligned}
 &(-\gamma^\mu p_\mu - m) (-\gamma^\nu p_\nu + m) = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2 \\
 &= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} p_\mu p_\nu - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = 0. \quad (4 \text{ 分})
 \end{aligned} \tag{33}$$

因此方程成立。上述平面波是狄拉克方程的解。

(2) (10 分) helicity 的定义是 $\hat{h} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$, 其中, $\mathbf{p}$ 是动量, $\mathbf{S}$ 是四维旋量空间中的电子自旋算子。证明上述平面波是 helicity 的本征态, 并求其本征值。(提示: 将 $\mathbf{p}$ 的方向设为 z 轴方向。)

取 $\mathbf{p}$ 的方向为 z 轴, 则在狄拉克表象中

$$-\gamma^\mu p_\mu + m = \gamma^3 p^3 - \gamma^0 p^0 + m = \begin{pmatrix} (m - p^0)I & p^3 \sigma^3 \\ -p^3 \sigma^3 & (m + p^0)I \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分}) \quad (34)$$

在狄拉克表象中, $V^{(r)}(m, \mathbf{0})$ 有两个独立的分量

$$V^{(1)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(2)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

因此

$$(-\gamma^\mu p_\mu + m)V^{(1)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} p^3 \\ 0 \\ m + p^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (36a)$$

$$(-\gamma^\mu p_\mu + m)V^{(2)}(m, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p^3 \\ 0 \\ m + p^0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分}) \quad (36b)$$

将 helicity 算符作用在平面波波函数上

$$\hat{h}\psi(x) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} V(p) e^{ipx} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} p^3 S^3 V(p) e^{ipx} = S^3 V(p) e^{ipx}. \quad (2 \text{ 分}) \quad (37)$$

在狄拉克表象中

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

则

$$S^3 V^{(1)}(p) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} p^3 \\ 0 \\ m+p^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} V^{(1)}(p), \quad (2 \text{ 分}) \quad (39a)$$

$$S^3 V^{(2)}(p) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ -p^3 \\ 0 \\ m+p^0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} V^{(2)}(p), \quad (2 \text{ 分}) \quad (39b)$$

代回 (37) 式得

$$\hat{h}\psi^{(1)}(x) = \frac{\hbar}{2} V^{(1)}(p) e^{ipx} = \frac{\hbar}{2} \psi^{(1)}(x), \quad (40a)$$

$$\hat{h}\psi^{(2)}(x) = -\frac{\hbar}{2} V^{(2)}(p) e^{ipx} = -\frac{\hbar}{2} \psi^{(2)}(x). \quad (40b)$$

因此，平面波解 $\psi^{(1)}(x)$ 和 $\psi^{(2)}(x)$ 是 helicity 算子的本征态，本征值分别为 $\hbar/2$ 和 $-\hbar/2$ 。

5. (20 分) 考虑外场中 Dirac 方程的定态解。外场是一个谐振子场，体系的哈密顿量为

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + \frac{1}{2}\omega \mathbf{r}^2$$

考虑低激发态， $H\psi = E\psi$ ，其中 ψ 是四分量旋量波函数。将 ψ 写为两个二分量旋量的叠加，

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

(1) (8 分) 利用 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 在狄拉克表象中的表示式，推导出二分量旋量 φ 与 χ 所需要满足的关系式，并且论证其中一个是小分量，另一个是大分量。

在这样的哈密顿量下，定态狄拉克方程有如下形式：

$$\left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + \frac{1}{2}\omega \mathbf{r}^2 \right) \psi = E\psi. \quad (41)$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 在狄拉克表象中的表示式：

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

可以得到

$$\left(mc^2 + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2\right)\varphi + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi = E\varphi, \quad (2 \text{ 分}) \quad (43a)$$

$$\left(-mc^2 + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2\right)\chi + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi = E\chi. \quad (2 \text{ 分}) \quad (43b)$$

由方程 (43b) 可知

$$\chi = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2 - \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2}\varphi \quad (1 \text{ 分}) \quad (44)$$

在低激发态下, 动能 $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ 及势能 $\frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2$ 均远小于粒子的静止能量 mc^2 , 于是系统的总能量 $E \approx mc^2$ 。 (1 分) 因此

$$\chi \approx \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc^2}\varphi \ll \varphi. \quad (2 \text{ 分}) \quad (45)$$

因此 φ 是大分量, χ 是小分量。

(2) (6 分) 利用上述大分量消去小分量, 证明 φ 满足一个具有 “ $\tilde{H}\varphi = \tilde{E}\varphi$ ” 形式的定态方程, 并且证明该 $\tilde{H}$ 包含 $\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2$ 项。

定义 $\tilde{E} := E - mc^2$ 。代入方程 (44) 并做一阶展开可得

$$\chi = \left[\frac{1}{2mc^2} \left(1 - \frac{\tilde{E} - \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2}{2mc^2} \right) c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right] \varphi. \quad (46)$$

将方程 (46) 代入方程 (43a), 可以得到

$$\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{\omega\mathbf{r}^2}{8m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right] \varphi = \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{4m^2c^2} \right] \tilde{E}\varphi. \quad (2 \text{ 分}) \quad (47)$$

左右两边同时除以系数 $\left[1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{4m^2c^2} \right]$, 并利用 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$ (1 分), 可以得到

$$\left[1 + \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2c^2} \right]^{-1} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{\omega\mathbf{r}^2}{8m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right] \varphi = \tilde{E}\varphi. \quad (48)$$

对左侧的系数做一阶展开可得

$$\left[1 + \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2c^2} \right]^{-1} \approx \left[1 - \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2c^2} \right]. \quad (49)$$

代回方程 (48), 只保留一阶相对论修正, 即保留量级大于 $\frac{\mathbf{p}^2/2m}{mc^2}$ 的项, 方程变为

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega\mathbf{r}^2 - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{\omega\mathbf{r}^2}{8m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^2 \frac{\omega\mathbf{r}^2}{8m^2c^2} \right] \varphi = \tilde{E}\varphi. \quad (3 \text{ 分}) \quad (50)$$

继续化简最后两项

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{r}^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}^2 \mathbf{r}^2 &= \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j p_i \mathbf{r}^2 p_j - \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j p_i p_j \mathbf{r}^2 \\
 &= \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j p_i [\mathbf{r}^2, p_j] = 2i\hbar \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j p_i r_j \\
 &= 2i\hbar \sum_{i,j} (\sigma_j \sigma_i + [\sigma_i, \sigma_j]) (r_j p_i + [p_i, r_j]) \\
 &= 2i\hbar \sum_{i,j} (\sigma_j \sigma_i + 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k) (r_j p_i - i\hbar \delta_{ij}) \\
 &= 4\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + 2i\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + 6\hbar^2.
 \end{aligned} \tag{51}$$

代回方程50，并代入轨道角动量的定义 $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 和自旋角动量的定义 $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$ 可得

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega \mathbf{r}^2 - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} + \frac{\omega}{m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} + \frac{3\omega \hbar^2}{4m^2 c^2} + \frac{i\omega}{m^2 c^2 \hbar} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}) \right] \varphi = \tilde{E} \varphi. \tag{52}$$

这正是所求证的定态方程的形式，等效哈密顿量

$$\tilde{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega \mathbf{r}^2 - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} + \frac{\omega}{m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} + \frac{3\omega \hbar^2}{4m^2 c^2} + \frac{i\omega}{m^2 c^2 \hbar} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}). \tag{53}$$

其中含有 $\frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} \omega \mathbf{r}^2$ 项。最后一项非厄米项表示粒子的产生湮灭，低能情况下粒子产生湮灭效应很弱，可忽略不计。

(本题不要求给出高阶项的表达式。因此推到 (50) 式就算完成了题目要求的证明，即可得满分。或者直接忽略一阶相对论修正，将 (45) 式代入 (43a) 只给出零阶项，也算完成题目要求的证明，也得满分。)

(3) (6分) 考虑一个简化情况，即 $\tilde{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} \omega \mathbf{r}^2 + V_1$ ，其中 V_1 是自旋——轨道耦合项。假设非相对论谐振子本征态已知，记 $|\Psi_{nlm}\rangle$ ，其中 l 是轨道角动量量子数， m 是磁量子数。求 V_1 在 $|\Psi_{nlm}\rangle |s_z\rangle$ 基矢上矩阵元的表示式，其中 $|s_z\rangle$ 是自旋角动量第三分量的本征态。(提示： $\langle j, m+1 | J_+ | j, m \rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$ ， $\langle j, m-1 | J_- | j, m \rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$)。

自旋轨道耦合项为 $\frac{\omega}{m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{l}$ ，求 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}$ 的矩阵元即可。

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{l} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x l_x + \sigma_y l_y + \sigma_z l_z). \tag{54}$$

l_x 和 l_y 可用升降算子表示为

$$l_x = (J_+ + J_-)/2, \tag{55a}$$

$$l_y = -i(J_+ - J_-)/2. \tag{55b}$$

代回方程 (54) 可得

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{l} = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{J_+}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) + \frac{J_-}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) + \sigma_z l_z \right]. \quad (2 \text{ 分}) \quad (56)$$

泡利矩阵在 $|s_z\rangle$ 基矢上的矩阵元为

$$\frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

结合题目已给出的 J_+ 、 J_- 的矩阵元, 可得 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}$ 在 $|\Psi_{nlm}\rangle |s_z\rangle$ 基矢上的矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle \uparrow | \langle \Psi_{n'l'm'} | \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} | \Psi_{nlm} \rangle | \uparrow \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle \langle \Psi_{n'l'm'} | l_z | \Psi_{nlm} \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} m \delta_{n'n} \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \end{aligned} \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} \langle \uparrow | \langle \Psi_{n'l'm'} | \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} | \Psi_{nlm} \rangle | \downarrow \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \uparrow | \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) | \downarrow \rangle \langle \Psi_{n'l'm'} | J_- | \Psi_{nlm} \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \delta_{n'n} \delta_{l'l} \delta_{m'(m-1)}, \end{aligned} \quad (58b)$$

$$\begin{aligned} \langle \downarrow | \langle \Psi_{n'l'm'} | \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} | \Psi_{nlm} \rangle | \uparrow \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \downarrow | \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) | \uparrow \rangle \langle \Psi_{n'l'm'} | J_+ | \Psi_{nlm} \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \delta_{n'n} \delta_{l'l} \delta_{m'(m+1)}, \end{aligned} \quad (58c)$$

$$\begin{aligned} \langle \downarrow | \langle \Psi_{n'l'm'} | \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} | \Psi_{nlm} \rangle | \downarrow \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \downarrow | \sigma_z | \downarrow \rangle \langle \Psi_{n'l'm'} | l_z | \Psi_{nlm} \rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} m \delta_{n'n} \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned} \quad (58d)$$