

2025 秋时间和空间期末考试

注意事项：

1. 本次考试为半开卷考试，仅允许携带讲义、作业与笔记；

解答题

1. 在参考系 S 中，一个质量为 m 的粒子从 $x = 0$ 处以速度 v ($0 < v < 1$) 沿长为 L 的杆向 $+x$ 运动。

(1) 求在粒子参考系中杆的长度；

(2) 粒子在运动过程中与一个静止的、质量远大于粒子的“小车”相撞，碰撞后粒子以速度 u 向 $-x$ 方向飞回，小车因质量 $M \gg m$ 而获得一个很小的速度 w 向 $+x$ 方向运动。碰撞过程四动量守恒，可以视为完全弹性碰撞，小车速度 $w \ll 1$ 。

求证：粒子损失的能量等于小车获得的动能 ($\approx \frac{1}{2}Mw^2$)。

(3) 在以下两个方案中，分别写出花费的固有时与 L, u, v 之间的关系，并比较哪个方案花费的固有时更短：

- 方案 A：粒子以速度 v 沿杆运动到达杆的另一端。 $x = L$ 后，立即以速度 v 对称飞回 $x = 0$ ；
- 方案 B：粒子在 L 与小车碰撞后，以速度 u 飞回 $x = 0$ 。

2. 考虑如下时空中的引力红移效应. 时空度规的线元由下式给出:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\alpha GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

假设有两个标准光源 G_1 和 G_2 , 分别位于径向坐标 r_1 和 r_2 处. 位于 G_1 信号在 r_2 处被接收, 频率为 f_1 , G_2 的频率为 f_2 , 求 $\frac{f_1}{f_2}$.

3. 对于半径为 R 的球面：

- (1) 写出球面的度规；
- (2) 利用非欧几何的面积公式计算球的表面积；
- (3) 证明球面的大圆是测地线，即满足测地线方程.

4. 宇宙的年龄为 t_0 , 若宇宙是一个静止的、平直的宇宙, 则我们能接收到的最近的信息构成一个半径为 ct_0 的球面. 现在考虑膨胀的宇宙:

- (1) 在 Robertson-Walker 度规中, $t = 0$ 时刻从 $r = r_h$ 处发出的光子在 $t = t_0$ 时刻到达观察者位置 $r = 0$, 求 r_h ; (用尺度因子 a 与 t_0 表示)
- (2) 求物理距离 R_h 与 r_h 之间的关系;
- (3) 若宇宙是中只包含压强为零的物质, 求 R_h . (用 t_0 与光速 c 表示)