中国科学技术大学 2025 秋

朱界杰班 理论力学A 期中考试

注意事项:

1. 本试卷为回忆版，并对解答题的排版进行了一定的调整.

2. 可能用到的一些公式:

达朗贝尔原理

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0$$

保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

无穷小诺特守恒量

$$-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi$$

自由运动慢子的拉氏函数

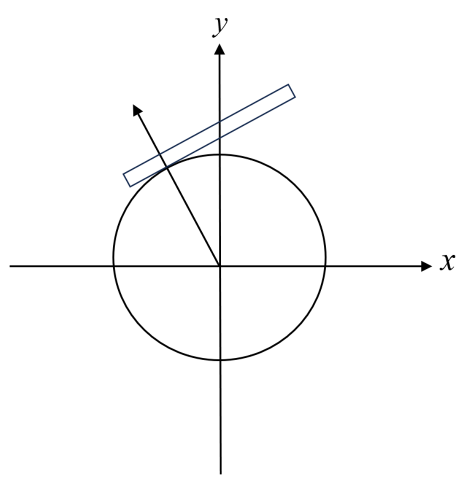
$$-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

最小耦合

$$U = q\left(\phi - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

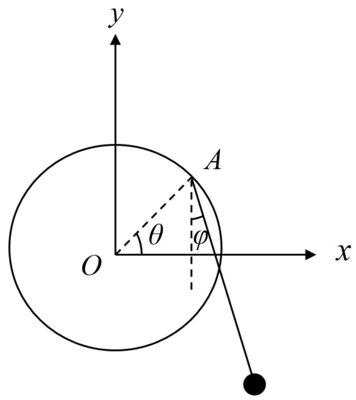
1. 现有一张长方形均匀薄板，其厚度可忽略不计，放在一个粗糙的圆柱体上作纯滚动。长方形的一条边与圆柱体的轴向平行。圆柱体的半径为 r，中心位于坐标原点。薄板质心的坐标是 (x, y)，薄板与水平方向的夹角为 θ。

   (1) 写出拉格朗日函数 $L(\theta, \dot{\theta})$。



   (2) 写出拉格朗日方程。

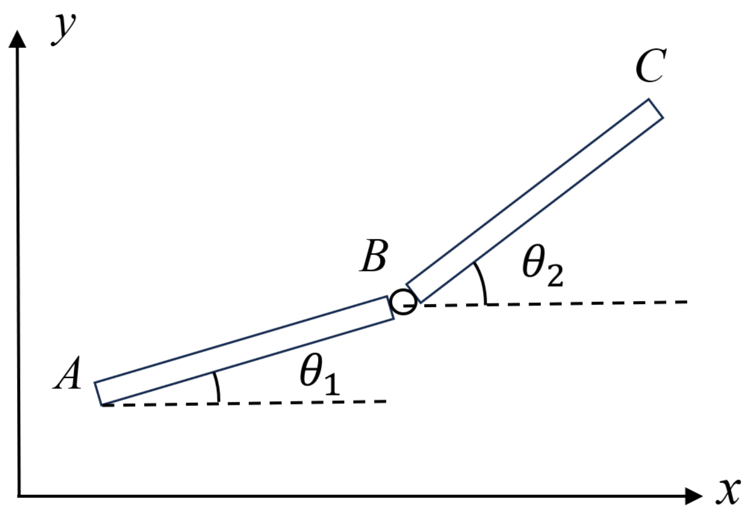
2. 如图所示，均匀圆盘可以绕其中心轴 O 无摩擦地转动。圆盘边缘的一点 A，通过轻绳连接了一个小球。设小球质量是 m，圆盘质量是 M，两者都在垂直平面内运动，在运动中绳子始终处于绷直状态。请写出系统的拉氏函数和运动方程。



3. 两根长度为 a、质量为 m 的细棒，端点用铰链相连接（记为 B 点），棒子放在光滑地面上。棒子的另外一端分别记作 A 和 C。

按下图所示建立直角坐标系，并以点 B 的坐标 (x, y) 和棒身与 x-轴的夹角 θ_1、θ_2 作为广义坐标。

开始时系统处于静止状态，A、B、C 成一条直线且沿 x-方向。随后在 C 点施加冲量为 I 的冲击力，求冲击之后的广义速度。



4. 质量为 m、电荷为 q 的相对论粒子，在均匀磁场中运动。磁场的磁感应强度是

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z.$$

（1）请写出粒子的拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$。（注意：写成非相对论动能的不得分）

（2）根据拉氏函数写出拉格朗日方程。

（3）系统的广义动量与广义能量是否守恒？写出这四个力学量中的守恒量。

（4）这个拉氏函数是否具有转动对称性？若对称，请写出对应的诺特守恒量。

（5）判断沿着 z-轴的推动（Lorentz boost）

$$\Delta t = \frac{\epsilon}{c} z, \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = \epsilon c t$$

是不是准对称变换。若是，请写出对应的诺特守恒量。

5. 长 l 的细棒位于一个平面内，取直角坐标系，其形状为

$$y = y(x).$$

那么在小挠度近似下，长度为 $\varDelta s$ 的一小段细棒的弯曲能是

$$\varDelta V = \gamma \cdot K^2 \cdot \varDelta s,$$

上式中 γ 是常数，K 是曲率，

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

将细棒沿 x-轴方向放置，考虑细棒横向（y-轴方向）小振动

$$y = y(t, x),$$

忽略重力的影响。由于振幅很小，可以忽略弯曲后细棒各点 x-坐标的变化，于是

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$

并且

$$y, \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \cdots$$

可以看成是一阶无穷小量。

（1）保留到二阶无穷小，写出细棒的动能密度 $\mathcal{T}$、势能密度 $\mathcal{V}$ 和拉格朗日密度 $\mathcal{L}$。（把棒子的线密度记作 ρ）

（2）写出系统的哈密顿作用量。

（3）利用哈密顿原理，推导棒子的运动方程和自然边界条件。

（4）求色散关系 $\omega = \omega(k)$。

（5）设运动方程的分离变量解是

$$y = q(t)u(x),$$

请写出 $q(t)$ 和 $u(x)$ 各自满足的常微分方程。

（6）求系统的自然频率 ω。注意：①棒子两端是自由的；②只需推导出 ω 满足的代数方程并化简，无需具体求出方程的解。