中国科学技术大学物理学院

如有问题请联系 linzeli@mail.ustc.edu.cn

2026 年 1 月 17 日

可能用到的一些公式：

拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0$$

哈密顿方程：

$$\dot{q}_a=\frac{\partial H}{\partial p_a},\quad \dot{p}_a=-\frac{\partial H}{\partial q_a}$$

主轴系中的欧拉运动学方程、欧拉动力学方程：

$$\begin{cases}\omega_1=\sin\theta\sin\psi\dot{\phi}+\cos\psi\dot{\theta}\\ \omega_2=\sin\theta\cos\psi\dot{\phi}-\sin\psi\dot{\theta}\\ \omega_3=\cos\theta\dot{\phi}+\dot{\psi}\end{cases}$$

$$\begin{cases}I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=M_1\\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=M_2\\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=M_3\end{cases}$$

泊松括号的定义、泊松定理：

$$[f,g]=\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a}-\frac{\partial g}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial p_a}$$

哈密顿-雅可比方程、受限哈密顿-雅可比方程：

$$H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0,\quad H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E,\quad S(t,q)=E+W(q)$$

正则变换的第一类生成函数：

$$p_a dq_a-P_a dQ_a+(K-H)dt=dF_1(t,q,Q)$$

$$p_a=\frac{\partial F_1}{\partial q_a},\quad P_a=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_a},\quad K=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

正则变换的第二类生成函数：

$$p_a dq_a+Q_a dP_a+(K-H)dt=d(F+P_aQ_a)\equiv dF_2(t,q,P)$$

$$p_a=\frac{\partial F_2}{\partial q_a},\quad Q_a=\frac{\partial F_2}{\partial P_a},\quad K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

一、微振动 (15%): 如图所示，两个小球通过刚性杆 (质量可忽略) 悬挂于 O_1 和 O_2 点。刚性杆的长度分别为 $2l$；小球质量分别为 $m, 2m$。

用弹性势能为

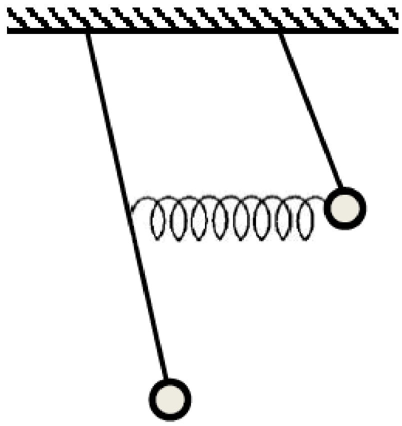
$$mgl(\theta_1 - \theta_2)^2$$

的轻弹簧连接两个刚性杆。弹簧的自然长度等于两个悬挂点的间距，左端固定在杆的中点，右端固定在杆的尾端。两根杆与垂直方向的夹角为 θ_1, θ_2。

为了简化问题，设系统在垂直平面内运动，小球没有垂直于纸面的位移分量。

(1) 写出此微振动系统拉氏函数、惯性矩阵和刚度矩阵。

(2) 求自然频率和简正模式。



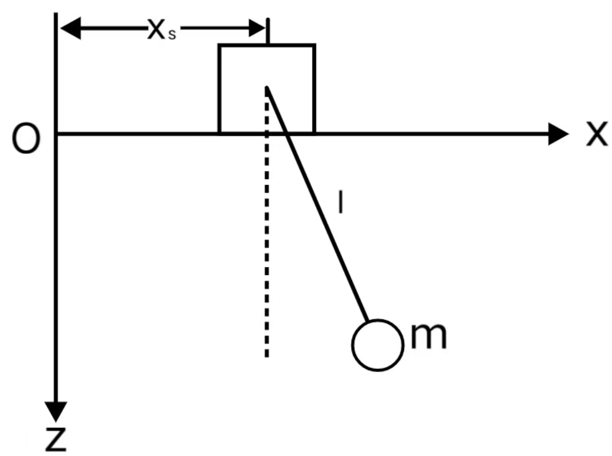
二、哈密顿方程 (20%): 一个球面摆用长度为 l 的轻绳悬挂在支座上。在伺服电机 (servo motor) 的驱动下，支座沿着水平轨道运动。

以水平轨道的向右作为 x-轴方向，向下作为 z-轴方向，垂直纸面向外作为 y-轴方向，建立直角坐标系。支座的水平坐标 $x_s(t)$ 受控，是已知函数，取小球的水平坐标 (x, y) 作为广义坐标。在运动过程中摆线与垂直方向的夹角很小，为一阶小量。

(1) 保留到二阶小量，在惯性系中写出系统的拉格朗日函数 $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$。

(2) 写出系统的哈密顿函数 $H(x, y, p_x, p_y)$。

(3) 写出系统的哈密顿方程。



三、相空间的诺特定理 (15%): 采用球坐标系，三维简谐振子的拉氏函数是

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2$$

(1) 写出系统的哈密顿函数。

(2) 利用泊松括号，验证

$$J^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2$$

是守恒量。

(3) 求此守恒量对应的相空间 (准) 对称变换。

四、泊松括号 (20%): 考虑一个质量为 m 的粒子在磁单极子产生的磁场中运动。磁场由磁矢势 $\vec{A}$ 描述，对应的磁感应强度为

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2}\vec{r}, \quad \hat{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{r}$$

其中 g 为磁荷密度。根据最小耦合原理，粒子的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

在该系统中，机械角动量 $\vec{L}_{\text{mech}} = \vec{r} \times m\vec{v}$ 不守恒。为此我们定义广义角动量 (Poincaré 矢量) 为：

$$\vec{J} = \vec{r} \times \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) - \frac{eg}{c}\hat{r}$$

(1) 计算基本泊松括号 $[x_i, p_j]$ 和 $[p_i, p_j]$。

(2) 利用泊松定理证明 $\vec{J}$ 是守恒量。

(3) 计算得到 $\vec{J}$ 的分量之间的对易关系。

五、刚体力学和 H-J 方程 (20%): 质量为 m 的拉格朗日陀螺 (即重力场中绕定点转动的对称陀螺) 的三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$，质心到定点的距离为 l。

(1) 选取三个欧拉角 ϕ, θ, ψ 作为广义坐标,写出刚体的哈密顿函数 $H(\phi, \theta, \psi, P_\phi, P_\theta, P_\psi)$。

(2) 利用哈密顿-雅可比方程，求积分形式的哈密顿主函数 $S(\phi, \theta, \psi, t; C_1, C_2, C_3)$，其中 C_1, C_2, C_3 为运动积分；

(3) 根据 $S(\phi, \theta, \psi, t; C_1, C_2, C_3)$ 推导拉格朗日陀螺的运动方程 (积分形式，不用求出具体积分)。

六、正则变换 (10%): 谐振子的哈密顿量为

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

如果我们选第一类生成函数（或称母函数）为

$$F_1(q,Q) = \frac{1}{2}\omega q^2 \cot(2\pi Q)$$

(1) 写出与母函数 F_1 对应的正则变换。

(2) 写出新的哈密顿量 $K(Q,P)$。

(3) 根据新的哈密顿量以及相应的正则方程，写出谐振子的解 $q(t), p(t)$。