《理论力学A》（2025 年秋季）期末考试参考答案

1. 拉格朗日力学（25 分）。讨论二维的弹簧振子的运动，即质量为 m 的粒子在如下的势场中运动：$V(x,y)=\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right)$，其中 k 为常数。已选力心为坐标原点，并选笛卡尔坐标 x,y 为广义坐标。

   (a) 写出系统的拉格朗日量，并根据欧拉-拉格朗日方程推导出粒子的动力学方程；

   (b) 证明在一般情况下，粒子的运动轨道为椭圆；

   (c) 在什么情况下轨道退化为直线？

   答：

   (a) 二维谐振子的拉格朗日量为：　$\cdots\cdots 5'$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right) \tag{1}$$

   代入欧拉-拉格朗日方程，得到：　$\cdots\cdots 5'$

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{2}$$
$$m\ddot{y} = -ky. \tag{3}$$

   (b) 谐振子的解为：　$\cdots\cdots 5'$

$$x = a\cos\omega t, \tag{4}$$
$$y = b\cos(\omega t+\alpha) \tag{5}$$

   其中 α 为 x,y 方向振动的位相差。

   利用和差化积公式，消去含时间 t 的项，得到：　$\cdots\cdots 5'$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\omega t+\alpha)\cos\omega t+\sin(\omega t+\alpha)\sin(\omega t)\\ &= \frac{xy}{ab}+\sqrt{(1-x^2/a^2)(1-y^2/b^2)}\end{aligned} \tag{6}$$

   整理得到：

$$\frac{1}{a^2\sin^2\alpha}x^2-2\frac{\cos\alpha}{ab\sin^2\alpha}xy+\frac{1}{b^2\sin^2\alpha}y^2=1 \tag{7}$$

   容易检验方程的左边是正定的：

$$\frac{1}{a^2b^2\sin^4\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{a^2b^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{a^2b^2\sin^2\alpha}>0 \tag{8}$$

   因此这是一个椭圆方程，中心为坐标的原点。

   (c) 根据方程（4）和（5）易知，当 $\alpha=0,\pi$ 时，轨道退化为直线：　$\cdots\cdots 5'$

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{9}$$

2. 哈密顿力学（25 分）。考察一个质量为 m、电荷量为 q 的粒子，在三维空间中运动。空间中存在均匀磁场 $\vec{B}=B\hat{z}$ 和均匀电场 $\vec{E}=E\hat{x}$（交叉场）。

(a) 选取规范 $\vec{A}=(0,Bx,0)$ 和标量势 $\phi=-Ex$，写出系统的拉格朗日量 L 和哈密顿量 $H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)$。 (6 分)

(b) 利用哈密顿正则方程求解 $p_y(t)$ 和 $p_z(t)$，并说明这两个动量分量是否守恒。若守恒，指出对应的循环坐标。 (6 分)

(c) 引入新的坐标变量 $x'=x-\frac{mcE}{qB^2}$（坐标平移），写出变换后的哈密顿量，并说明该系统在 $x-y$ 平面内的运动可以等效为一个在移动中心做圆周运动（回旋运动）的粒子。 (8 分)

答：

(a) 带电粒子的拉氏量为： $\cdots\cdots 2'$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{qB}{c}x\dot{y}+qEx$$

广义动量： $\cdots\cdots 3'$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}$$
$$p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}+\frac{qB}{c}x$$
$$p_z=m\dot{z}$$

哈密顿量： $\cdots\cdots 5'$

$$\begin{aligned} H &= p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L \\ &= \frac{p_x^2+\left(p_y-\frac{qB}{c}x\right)^2+p_z^2}{2m}-qEx \end{aligned} \tag{10}$$

(b) 显眼，y,z 为循环坐标，相应的守恒量为：p_y,p_z。 $\cdots\cdots 6'$

(c) 根据哈密顿正则方程，得到 x 方向的运动方程为： $\cdots\cdots 5'$

$$\dot{p_x}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{p_y}{m}-\frac{q^2B^2}{mc^2}x+qE \tag{11}$$

即：

$$\ddot{x}=\frac{1}{m}\left(\frac{p_y}{m}+qE\right)-\omega_B^2x\equiv-\omega_B^2(x-x_c) \tag{12}$$

其中 $\omega_B=qB/mc$ 为回旋频率，以及：

$$x_c\equiv\frac{p_yc}{qB}+\frac{mc^2E}{qB^2} \tag{13}$$

解得： $\cdots\cdots 2'$

$$x(t)=x_c+A\cos(\omega_Bt+\phi) \tag{14}$$

代入 y 方向的运动方程，得到：

$$\dot{y}=\frac{p_y}{m}-\omega_Bx(t)=\frac{p_y}{m}-\omega_B(x_c+A\cos(\omega_Bt+\phi)) \tag{15}$$

直接积分，得到： $\cdots\cdots 2'$

$$y(t)=-\frac{cE}{B}t-A\sin(\omega_Bt+\phi)+y_0 \tag{16}$$

3. 考虑一个质量为 m 的粒子在磁单极子产生的磁场中运动。磁场由矢量势 $\vec{A}$ 描述，磁场强度为 $\vec{B}=\frac{g}{r^2}\hat{r}$（$g$ 为磁荷强度）。根据最小耦合原理，粒子的哈密顿量为 $H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2$。已知在该系统中，机械角动量 $\vec{L}_{\text{mech}}=\vec{r}\times m\vec{v}$ 不守恒。定义广义角动量（Poincaré 矢量）为：

$$\vec{J}=\vec{r}\times\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)-\frac{eg}{c}\hat{r} \tag{17}$$

(a) 计算基本泊松括号 $[x_i,p_j]$ 和 $[p_i,p_j]$；

(b) 通过泊松括号证明 $\vec{J}$ 是守恒量；

(c) 计算得到 $\vec{J}$ 的分量之间的对易关系。

答：

(a) 根据基本泊松括号的定义： $\cdots\cdots 2'$

$$[x_i,p_j]=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}-\frac{\partial p_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right)=\sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{ij} \tag{18}$$

(b) 注意到，广义角动量不显含 t，所以只需证明 $[J,H]=0$。即：

$$\frac{df}{dt}=[f,H]=0 \quad \cdots\cdots 2' \tag{19}$$

记动理动量 (Kinetic Momentum) $\boldsymbol{\pi}=m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}$，所以哈密顿量和广义角动量分量可写为：

$$H=\sum_l\frac{1}{2m}\pi_l\pi_l,\quad J_i=\epsilon_{ijk}x_j\pi_k-\frac{eg}{c}\frac{x_i}{r}$$

首先计算 π 的对易关系： $\cdots\cdots 2'$

$$\begin{aligned}[][\pi_i,\pi_j]&=\left[p_i-\frac{e}{c}A_i,p_j-\frac{e}{c}A_j\right]\\&=-\frac{e}{c}[p_i,A_j]-\frac{e}{c}[A_i,p_j]\\&=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)=\frac{e}{c}\epsilon_{ijk}B_k=\frac{eg}{c}\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r^3}\end{aligned}$$

同时有 $[x_i,\pi_j]=[x_i,p_j]=\delta_{ij}$。 $\cdots\cdots 1'$

计算 $[J_i,H]$： $\cdots\cdots 5'$

$$[J_i,H]=\frac{1}{2m}\left[\epsilon_{ijk}x_j\pi_k-\frac{eg}{c}\frac{x_i}{r},\pi_l\pi_l\right]=\frac{\pi_l}{m}\left[\epsilon_{ijk}x_j\pi_k-\frac{eg}{c}\frac{x_i}{r},\pi_l\right]$$

上式右侧第一项展开：

$$[\epsilon_{ijk}x_j\pi_k,\pi_l]=\epsilon_{ijk}(x_j[\pi_k,\pi_l]+[x_j,\pi_l]\pi_k)$$

代入 $[\pi_k,\pi_l]=\frac{eg}{c}\epsilon_{klm}\frac{x_m}{r^3}$ 并利用 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$ 化简可得：

$$[\epsilon_{ijk}x_j\pi_k,\pi_l]=\frac{eg}{cr^3}(r^2\delta_{il}-x_ix_l)+\epsilon_{ilk}\pi_k$$

右侧第二项展开：

$$\left[\frac{x_i}{r},\pi_l\right]=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{x_i}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i(x_kx_k)^{-1/2})=\frac{\delta_{il}}{r}-\frac{x_ix_l}{r^3}$$

综合上述结果：

$$[J_i,H]=\frac{\pi_l}{m}\left[\left(\frac{eg}{cr^3}(r^2\delta_{il}-x_ix_l)+\epsilon_{ilk}\pi_k\right)-\frac{eg}{c}\left(\frac{\delta_{il}}{r}-\frac{x_ix_l}{r^3}\right)\right]=\frac{eg}{mcr^3}\epsilon_{ilk}\pi_l\pi_k=0$$

因为 ϵ_{ilk} 是反对称的，而 $\pi_l\pi_k$ 是对称的，故缩并为 0。得证。

(c) 直接计算 $[J_i, J_j]$: $\cdots\cdots 8'$

$$[J_i, J_j] = \left[\epsilon_{iab}x_a\pi_b - \frac{eg}{c}\frac{x_i}{r}, \epsilon_{jcd}x_c\pi_d - \frac{eg}{c}\frac{x_j}{r}\right]$$

展开为四项。

第一项: $\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}[x_a\pi_b, x_c\pi_d]$

$$[x_a\pi_b, x_c\pi_d] = x_a[\pi_b, x_c]\pi_d + x_a x_c[\pi_b, \pi_d] + [x_a, x_c]\pi_d\pi_b + x_c[x_a, \pi_d]\pi_b$$

记 $L_i = \epsilon_{iab}x_a\pi_b$ 为运动角动量，注意到 $[\pi_a, \pi_b] \neq 0$ 将引入新的不属于原本角动量对易关系的项，整理得:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k + \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}x_a x_c[\pi_b, \pi_d] = \epsilon_{ijk}L_k + \frac{eg}{c}\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r}$$

第二项和第三项（交叉项）:

$$\left[L_i, \frac{x_j}{r}\right] = \epsilon_{iab}x_a\left[\pi_b, \frac{x_j}{r}\right] = \epsilon_{iab}x_a\left(\frac{\delta_{bj}}{r} - \frac{x_b x_j}{r^3}\right) = \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_k$$

同理:

$$\left[\frac{x_i}{r}, L_j\right] = -\left[L_j, \frac{x_i}{r}\right] = -\frac{1}{r}\epsilon_{jki}x_k = \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_k$$

注意前面的系数符号，此处需仔细处理。在 $[J_i, J_j]$ 中，这两项对应为 $-[L_i, \frac{eg}{c}\frac{x_j}{r}] - [\frac{eg}{c}\frac{x_i}{r}, L_j]$。

第四项:

$$\left[\frac{x_i}{r}, \frac{x_j}{r}\right] = 0$$

(因为坐标之间互相对易)。

综合所有项:

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i, L_j] - \frac{eg}{c}\left[L_i, \frac{x_j}{r}\right] - \frac{eg}{c}\left[\frac{x_i}{r}, L_j\right] + 0 \\
&= \left(\epsilon_{ijk}L_k + \frac{eg}{c}\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r}\right) - \frac{eg}{c}\left(\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_k\right) - \frac{eg}{c}\left(\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_k\right) \\
&= \epsilon_{ijk}L_k - \frac{eg}{c}\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r} \\
&= \epsilon_{ijk}\left(L_k - \frac{eg}{c}\frac{x_k}{r}\right) \\
&= \epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned}$$

证毕，$\vec{J}$ 的分量满足标准的角动量代数关系。

4. 谐振子的哈密顿量为: $H = \frac{1}{2}\left(p^2 \omega^2 q^2\right)$，如果我们选第一类生成函数（或称母函数）为: $F_1(q, Q) = \frac{1}{2}\omega q^2 \cot(2\pi Q)$。

(a) 写出与母函数 F_1 对应的正则变换；

(b) 写出新的哈密顿量 $K(Q, P)$；

(c) 根据新的哈密顿量以及相应的正则方程，写出谐振子的解: $q(t), p(t)$。

答:

(a) 根据

$$p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (K - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1 \tag{20}$$

得到： $\cdots\cdots 2'$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \omega q\cot(2\pi Q) \tag{21}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \pi\omega q^2\csc^2(2\pi Q) \tag{22}$$

因此得到相应的正则变换为： $\cdots\cdots 2'$

$$q = \sqrt{\frac{P}{\pi\omega}}\sin(2\pi Q) \tag{23}$$

$$q = \omega\sqrt{\frac{P}{\pi\omega}}\cos(2\pi Q) \tag{24}$$

(b) 新的哈密顿函数为： $\cdots\cdots 2'$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\omega}{2\pi}P \tag{25}$$

(c) 根据正则方程有：

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{26}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \tag{27}$$

因此有： $\cdots\cdots 2'$

$$Q(t) = \frac{\omega}{2\pi}(t - t_0), \quad P(t) = P_0 = cont \tag{28}$$

最终有： $\cdots\cdots 2'$

$$q(t) = \sqrt{\frac{P_0}{\pi\omega}}\sin\omega(t - t_0) \tag{29}$$

$$p(t) = \omega\sqrt{\frac{f_0}{\pi\omega}}\cos\omega(t - t_0) \tag{30}$$

5. 质量为 m 的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称陀螺的三个主转动惯量为：$I_1 = I_2 \neq I_3$，其中质心到固定点的距离为 l。

(a) 选取三个欧拉角(ϕ,θ,ψ)作为广义坐标，写出刚体的哈密顿函数 $H(\phi,\theta,\psi,p_\phi,p_\theta,p_\psi)$；

(b) 通过哈密顿-雅可比方程求积分形式的哈密度主函数 $S(\phi,\theta,\psi,t;C_1,C_2,C_3)$，其中 C_1,C_2,C_3 为运动积分；

(c) 根据 $S(\phi,\theta,\psi,t;C_1,C_2,C_3)$ 推导拉格朗日陀螺的运动方程（积分形式，不用具体积分）。

答：

(a) 刚体的拉格朗日量为： $\cdots\cdots 2'$

$$L = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta \tag{31}$$

正则动量分别为： ······2′

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = I_1\sin^2\theta\dot\phi + I_3\left(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta\right)\cos\theta \tag{32}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = I_1\dot\theta \tag{33}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3\left(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta\right) \tag{34}$$

反解，得到：

$$\dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \tag{35}$$

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{I_1} \tag{36}$$

$$\dot\psi+\dot\phi\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3} \tag{37}$$

根据勒让德变换，得到： ······2′

$$H = T+V \tag{38}$$

$$= \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\sin^2\theta\dot\phi^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta \tag{39}$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta \tag{40}$$

(b) 不含时的哈密顿-雅可比方程为： ······2′

$$E = \frac{1}{2I_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2I_1\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi} - \frac{\partial W}{\partial\psi}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2I_3}\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)^2 + mgl\cos\theta \tag{41}$$

假设 $W(\phi,\theta,\psi)$ 可分离变量： ······2′

$$W(\phi,\theta,\psi) = P_\phi\phi + P_\psi\psi + W_\theta(\theta) \tag{42}$$

其中 E, P_ϕ, P_ψ 为三个首积分。代入哈密顿-雅可比方程得到： ······2′

$$\frac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(P_\phi - P_\psi\cos\theta\right)^2} \tag{43}$$

因此有： ······2′

$$S = -Et + P_\phi\phi + P_\psi\psi \pm \int^\theta \mathrm{d}\theta\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(P_\phi - P_\psi\cos\theta\right)^2} \tag{44}$$

(c) 由 S 得到： $\cdots\cdots 6'$

$$
\begin{aligned}
Q_\phi &= \frac{\partial S}{\partial P_\phi} && (45)\\
&= \phi \pm \int^\theta \mathrm{d}\theta \frac{(P_\phi - P_\psi\cos\theta)/\sin^2\theta}{\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(P_\phi - P_\psi\cos\theta)^2}} && (46)\\
Q_\psi &= \frac{\partial S}{\partial P_\psi} && (47)\\
&= \psi \pm \int^\theta \mathrm{d}\theta \frac{-\frac{I_1}{I_3}P_\psi + (P_\phi - P_\psi\cos\theta)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(P_\phi - P_\psi\cos\theta)^2}} && (48)\\
Q_E &= \frac{\partial S}{\partial E} && (49)\\
&= -t \pm \int^\theta \mathrm{d}\theta \frac{I_1}{\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(P_\phi - P_\psi\cos\theta)^2}} && (50)
\end{aligned}
$$

以及： $\cdots\cdots 3'$ (附加分，上三式给出了广义坐标随时间的演化，原则上还需要得到正则动量随时间的演化。)

$$
\begin{aligned}
p_\phi &= \frac{\partial S}{\partial \phi} = P_\phi = const. && (51)\\
p_\psi &= \frac{\partial S}{\partial \psi} = P_\psi = const. && (52)\\
p_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = \pm\sqrt{2I_1(E-mgl\cos\theta) - \frac{I_1}{I_3}P_\psi^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(P_\phi - P_\psi\cos\theta)^2} && (53)
\end{aligned}
$$