中国科学技术大学 2025 秋

量子力学B 易为班 期中考试

注意事项:

1. 本试卷为基于评课社区用户上传的手写回忆版排版而成的，对解答题的排版进行了一定的调整.

2. 本试卷第二题缺失.

1. 已知 $\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right),\hat{p}=-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)$。

   （1） 写出量子态 $|\psi\rangle$ 在正交完备归一基组 $\{|\psi_n\rangle\}$ 上的展开形式，并写出展开系数和量子态 $|\psi\rangle$ 对应的位置空间波函数之间的关系。

   （2） 已知 $\hat{A}|1\rangle=|1\rangle+\sqrt{2}i|2\rangle-|3\rangle,\hat{A}|2\rangle=-\sqrt{2i|1\rangle}-i|3\rangle,\hat{A}|3\rangle=-|1\rangle+i|2\rangle+2|3\rangle$，写出 $\hat{A}$ 在正交归一基组 $\{|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\}$ 下的矩阵表示，并判断 $\hat{A}$ 是否是厄米算符。

   （3） 假设某个表象的基是 $\{|\psi_n\rangle\}$ ，在坐标表象下写出这组基的正交归一完备性关系。

   （4） 假设 $t=0$ 时刻体系的归一化量子态是 $|\psi\rangle=\alpha|E_1\rangle+\beta|E_2\rangle$，其中 α,β 均为复数，$|E_1\rangle,|E_2\rangle$ 是体系哈密顿量的归一化本征态，对应本征值 E_1,E_2, 写出 $t>0$ 任意时刻动量期望值的表达式，并且分析什么情况下该期望值不随时间演化。

2. 本题缺失，只能判断是和两个粒子的体系相关。

3. 一维谐振子，记其能量本征态为 $|n\rangle$ 。

（1）求 $\langle n|\hat{T}|n\rangle$ 及 $\langle n|\hat{V}|n\rangle$ ，其中 $\hat{T}=\frac{\hat{p}^2}{2m}$， $\hat{V}=\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$.

（2）若在 $t=0$ 时刻，谐振子处于叠加态 $|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n=0\rangle+|n=2\rangle\right)$，求 $t>0$ 时刻的状态，并计算此时的期望值 $\langle\hat{V}\rangle$ 。

4. 设某三维希尔伯特空间的一组正交归一完备基为 $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ，已知体系哈密顿量作用于三个基矢如下：

$$\hat{H}|1\rangle = i\hbar|2\rangle, \quad \hat{H}|2\rangle = -i\hbar|1\rangle, \quad \hat{H}|3\rangle = 2\hbar|3\rangle.$$

（1） 写出 $\hat{H}$ 的矩阵表示；

（2） 写出时间演化算符 $\hat{U}(t)$ 的矩阵形式；

（3） 若归一化初态为 $|\psi(0)\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|3\rangle$ ，求体系在 $t > 0$ 时刻的状态 $|\psi(t)\rangle$ 在基底 $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ 上的矩阵表示。

5.（1）在海森堡绘景下，求一维简谐振子问题的对易子

$$[\hat{x}(0), \hat{p}(t)], \quad 其中 t > 0.$$

（2）考虑质量为 m 的一维自由粒子，其哈密顿量为 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. 已知在 $t = 0$ 时，

$$a = \langle \hat{p}^2 \rangle_{t=0}, \quad b = \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle_{t=0}, \quad c = \langle \hat{x}^2 \rangle_{t=0},$$

求 $\langle \hat{x}^2 \rangle$ 随时间 t 演化的形式（$t > 0$ ）。