

量子力学B 易为班 期末考试

注意事项:

1. 本试卷为基于评课社区用户上传的手写回忆版排版而成的,对解答题的排版进行了一定的调整.

1. 第二主族原子 ^{137}Yb , 其核自旋为 $I = \frac{5}{2}$ 。

(1) 写出其基态 $(5_s)^2$ 及第一激发态 $(5_s 5_p)$ 所有可能的跃迁项 ($^{2S+1}L_J$)。

(2) 考虑超精细结构, 写出其第一激发态在零磁场下的各简并子空间维度。

2. 已知对一个自由电子的 z 分量进行测量, 结果为 $\pm\hbar$ 。

(1) 加接一个测量自旋的 y 分量, 可能得到的结果及概率分布如何?

(2) 如果上一问测量自旋的方向和 z 轴成 θ 角, 可能的测量值及分布如何?

3. 两个自旋 $1/2$ 的电子, 处于一维谐振子基态和第一激发态上, 同时考虑空间和自旋态。按总自旋分类, 写出该两电子体系所有可能的量子态 (记谐振子基态和第一激发态为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$)。

4. 考虑 2 个自旋 1/2 的电子，定义算符

$$\hat{P}_{12} = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2),$$

其中 $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ 是泡利矩阵， \hat{P}_{12} 的下标表示作用在第几个电子上。

(1) 利用总自旋算符 $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ 表示 \hat{P}_{12} ，并求 \hat{P}_{12} 的本征值和本征态。

(2) 计算 $\hat{P}_1|\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $\hat{P}_2|\uparrow\uparrow\rangle$ ，其中 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 表示第一个电子处于 z 方向自旋上态，第二个电子处于 z 方向自旋下态。 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 含义类似。

5. 请推导并写出轨道角动量算符 $\hat{\mathbf{L}}$ 在 $l=2$ 子空间内的矩阵表示，取力学量完备集为 $\{\hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ 。

6. 考虑一个轨道角动量 $L = 1$ 与自旋 $1/2$ 的耦合体系。设其哈密顿量为

$$\hat{H} = A\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + B\overline{L_x}\overline{S_x},$$

其中 $B \ll A$ (假设 A, B 均为正实数)。

- (1) 利用微扰论求体系在 $J = \frac{1}{2}$ 小空间内各级能量，并精确到 B 的一阶小量。
- (2) 写出并计算对 $|J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle$ 态的能量二阶修正有贡献的矩阵元 (不需计算能量修正本身)。

已知:

$$|J = \frac{3}{2}, m_J\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J + \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J - \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2}\rangle$$

$$|J = \frac{1}{2}, m_J\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J + \frac{1}{2}, m_S = -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m_J}{3}} |m_L = m_J - \frac{1}{2}, m_S = -\frac{1}{2}\rangle$$

其中 m_J 、 m_L 和 m_S 分别为 \hat{J}_z 、 \hat{L}_z 和 \hat{S}_z 的量子数。总角动量定义为:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

7. 一个自旋 $1/2$ 的粒子处于沿 z 方向的磁场中，磁感应强度为 \mathbf{B} 的。忽略质心运动自由度后的哈密顿量在合适的单位下可写作

$$\hat{H} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{z},$$

- (1) 若存在一个小的扰动磁场 $\mathbf{B}' = B_1 \hat{e}_x$ ，其中 $B_1 \ll B_0$ ，求系统基态的移动，并精确到 B_1 的最低阶修正。
- (2) 如果系统于零时刻处于 z 方向自旋下态，利用一阶含时微扰论，求此后 t 时刻系统跃迁到 z 方向自旋上态的概率 (写出积分表达式即可)。
- (3) 上一问的时间演化中，系统能否在某时刻处于自旋上态? 为什么?