2026 年 1 月 13 日（周二）8:30-10:30

2025秋量子力学A期终考试试卷

注意事项：

1. 本试卷为回忆版，题目表述与原卷不符；
2. 考试要求六题中选择五题作答，如都写则按照得分最高的五题计分；
3. 若有侵权，请联系 jwf06@mail.ustc.edu.cn。

一、 定义压缩算子

$$S(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\xi^* \mathfrak{a}^2 - \xi(\mathfrak{a}^\dagger)^2)\right\}$$

其中 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{a}^\dagger$ 是谐振子的升降算子。若取 $\xi = r$ 为实数，证明 $S(r)$ 为标度变换，即 $S^\dagger(r)XS(r)$ 正比于 X，而 $S^\dagger(r)PS(r)$ 正比于 P，比例系数互为倒数，并求出比例系数。

二、 考虑在线性势中的粒子，哈密顿量为

$$H = \frac{P^2}{2m} - \gamma X$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 为常数。

1. 写出相互作用绘景下态矢量 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 和时间演化算符 $\tilde{U}(t)$ 满足的微分方程。
2. 该模型可以严格求解，下面给出解的形式，其中 $\alpha(t)$ 未确定：

$$\tilde{U}(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\alpha(t)}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{i\gamma P t^2}{2m\hbar}\right)\exp\left(\frac{i\gamma X t}{\hbar}\right)$$

试确定相因子 $\alpha(t)$，并给出 Schrödinger 绘景中的时间演化算符 $U(t)$。

三、 考虑氢原子模型，哈密顿量为

$$H_0 = \frac{P^2}{2\mu} - \frac{e^2}{R}$$

加上 z 方向匀强磁场，哈密顿量变为

$$H = H_0 + \omega(J_z + S_z)$$

其中 J_z 为总角动量的 z 分量，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$。在 C.S.C.O.$\{H, L^2, S^2, J^2, J_z\}$ 中讨论该问题，假设初态为 $|n=1, l=1, s=1/2, j=3/2, m_j\rangle$，求演化后在 $t>0$ 时粒子处在能级 $|n', l', 1/2, j', m_j'\rangle$ 的概率。

回忆者注：本题中不应当把 ω 当做小量微扰做，应当严格求解。

四、 考虑二维谐振子，用谐振子的升降算符 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 表示哈密顿量为：

$$H_0 = \hbar\omega\left(N_1 + N_2 + 1\right) = \hbar\omega\left(\mathfrak{a}_1^\dagger\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2^\dagger\mathfrak{a}_2 + 1\right)$$

在此基础上增加微扰项：

$$H' = \lambda\left(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^\dagger + \mathfrak{a}_1^\dagger\mathfrak{a}_2\right)$$

求：

1. 哈密顿量 $H = H_0 + H'$ 可严格求解，求出第二激发态的能量本征值；
2. 利用微扰论求出第二激发态的能量本征值，并与严格解比较。

五、 我们知道，时间反演算符对角动量的变换关系是

$$\boldsymbol{\Theta J \Theta^{-1}} = -\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{J}\Theta\left|z+\right\rangle = -\Theta\boldsymbol{J}\left|z+\right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\Theta\left|z+\right\rangle$$

因此 $\Theta\left|z+\right\rangle \propto \left|z-\right\rangle$，时间反演算符将自旋 1/2 粒子的自旋上态和自旋下态互相变换：

$$\Theta\left|z+\right\rangle = e^{i\alpha_+}\left|z-\right\rangle, \quad \Theta\left|z-\right\rangle = e^{i\alpha_-}\left|z+\right\rangle$$

其中 α_+ 和 α_- 为实常数。做最简单的假定，若 $\alpha_+ = \alpha_- = 0$，则

$$\Theta\left|z+\right\rangle = \left|z-\right\rangle, \quad \Theta\left|z-\right\rangle = \left|z+\right\rangle$$

将时间反演算符作用在 $\left|x+\right\rangle$ 态上，得到

$$\Theta\left|x+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Theta\left|z+\right\rangle + \Theta\left|z-\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z-\right\rangle + \left|z+\right\rangle\right) = \left|x+\right\rangle$$

同理可得 $\Theta\left|x-\right\rangle = -\left|x-\right\rangle$，但这并不符合我们的预期。试求 $e^{i\alpha_+}$ 和 $e^{i\alpha_-}$ 的关系，使得对于任意方向的自旋态 $\left|n\pm\right\rangle$，时间反演算符的作用满足 $\Theta\left|n\pm\right\rangle \propto \left|n\mp\right\rangle$。

六、 考虑匀强外磁场中的原子，定义赝动量

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{R}$$

其中磁场沿 z 方向

$$\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{R}$$

1. 求赝动量各分量的对易关系；
2. 定义平移算符

$$U(\boldsymbol{a}) = exp(-\frac{i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{K}}{\hbar})$$

则 $U(\boldsymbol{a})$ 和 $U(\boldsymbol{b})$ 之间并不一定对易，具体地有

$$U(\boldsymbol{a})U(\boldsymbol{b}) = U(\boldsymbol{b})U(\boldsymbol{a})exp(-\frac{i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_z}{l^2})$$

其中 $l = \sqrt{\frac{\hbar}{|q|B}}$，试证明之。

回忆者注：考试过程中补充条件 $q < 0$。