中 国 科 学 技 术 大 学

2025—2026学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计　　得分 ＿＿＿＿＿

所在院系 ＿＿＿＿　姓名 ＿＿＿＿＿　学号 ＿＿＿＿＿

考试时间: 2026 年 1 月 15 日上午 8:30–10:30;　可使用简单计算器

装……订……线

一、 (30分, 每小题3分) **填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.**

(1) 某大学的学生中, 有 25% 的学生有经常运动的习惯. 据统计, 有运动习惯的学生通过体能测试的概率为 90%, 而没有此习惯的学生能通过的概率为 60%. 现随机抽取一名学生, 已知该学生通过了体能测试, 则该学生有运动习惯的概率为＿＿＿＿.

(2) 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且期望和方差分别为 μ 和 $\sigma^2\,(\sigma>0)$. 若随机变量 Y 的分布函数为 $F(ay+b)$, 而期望和方差分别为 0 和 1, 则(　)
(A) $a=\sigma, b=\mu$　(B) $a=\sigma, b=-\mu$　(C) $a=\frac{1}{\sigma}, b=\mu$　(D) $a=\frac{1}{\sigma}, b=-\mu$

(3) 若在以原点为圆心的单位圆周上随机取两点, 则以概率 1 将该圆周分为两段弧. 那么, 点 $(1,0)$ 所在的弧的弧长期望为(　)
(A) $\frac{2}{3}\pi$　(B) $\frac{3}{4}\pi$　(C) $\frac{4}{3}\pi$　(D) $\frac{3}{2}\pi$

(4) 若随机向量 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(1,1,4,4;0)$, 则 $\mathrm{E}[XY^2]=$＿＿＿＿.

(5) 设 X 服从参数为 $p=\frac{1}{2}$ 的几何分布, 则其熵 $H(X)=$＿＿＿＿ (使用自然对数).

(6) 投掷一枚均匀的硬币 400 次, 则出现正面的次数在 190 到 210 之间的概率近似为＿＿＿＿ (精确到小数点后三位).

(7) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 且统计量 $T=a(X_1+X_2)/\sqrt{X_3^2+X_4^2}$ 服从 t 分布, 则常数 $a=$＿＿＿＿.

(8) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n\,(n\geq 3)$ 为来自 Poisson 总体的一组简单随机样本, 且 $\overline{X},S^2,X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 分别表示样本均值, 样本方差, 样本最小值和最大值. 下列中不是总体参数 λ 的无偏估计量的是(　)
(A) $\overline{X}$　(B) S^2　(C) $(X_{(1)}+X_{(n)})/2$　(D) $(X_1+X_n)/2$

(9) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 一组简单随机样本, 在置信系数为 $1-\alpha$ 下, 未知参数 μ 的置信区间为 $[\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2]$, 而其置信下限和置信上限分别为 $\hat{\mu}_3$ 和 $\hat{\mu}_4$, 则这些统计量之间的大小关系为(　)
(A) $\hat{\mu}_3<\hat{\mu}_1<\hat{\mu}_2<\hat{\mu}_4$　(B) $\hat{\mu}_1<\hat{\mu}_3<\hat{\mu}_4<\hat{\mu}_2$
(C) $\hat{\mu}_1<\hat{\mu}_3<\hat{\mu}_2<\hat{\mu}_4$　(D) $\hat{\mu}_3<\hat{\mu}_1<\hat{\mu}_4<\hat{\mu}_2$

(10) 为检验某路口每分钟通过的汽车数量是否服从 Poisson 分布, 我们观察了 120 个以分钟为单位的计数数据, 将车流量分为“0–5辆”、“6–8辆”、“9–11辆”、“12–15辆”、“16辆及以上”共 5 组, 则进行拟合优度检验时, χ^2 分布的自由度为(　)
(A) 3　(B) 4　(C) 118　(D) 119

二、 (18分) 设二维连续型随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-y},\quad 0<x<y<\infty.$$

(1) 分别求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

(2) 分别求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

(3) 求 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}$.

三、 (16分) 设随机向量 (X,Y,Z) 的概率密度函数为 $f(x,y,z)=8xyz$, $0<x,y,z<1$, 且随机变量 $U=X$, $V=XY$, $W=XYZ$.

(1) 求 (U,V,W) 的联合概率密度函数 $g(u,v,w)$.

(2) 随机变量 U,V,W 是否相互独立? 证明你的结论.

四、 (24分) 设某种元件的正常工作寿命服从指数分布, 而期望 θ 未知. 为估计 θ, 随机抽取 n 个这种元件同时作测试, 直到其中出现有 $k\,(1\le k\le n)$ 个元件失效时立即停止.

(1) 若 $k=1$, 记失效元件的工作寿命为 T, 确定 a, 使得 $\hat{\theta}=aT$ 为 θ 的无偏估计量.

(2) 设 k 个失效元件的工作寿命依次为 $t_1<t_2<\cdots<t_k$. 已知此时似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}\exp\Big\{-\frac{1}{\theta}\Big[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\Big]\Big\}.$$

求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

(3) 利用指数分布的无记忆性, 证明:

$$\mathrm{E}[t_k]=\sum_{j=1}^{k}\frac{\theta}{n-j+1},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

(4) 利用上面的结论验证估计量 $\hat{\theta}_L$ 是否为 θ 的无偏估计.

五、 (12分) 某化工企业使用两种不同催化剂 (A 和 B) 生产同一化合物, 产品纯度服从正态分布. 从催化剂 A 的生产批次中随机抽取 16 个样本, 测得纯度的样本均值为 92.5%, 样本方差为 4.0 ($\%^2$); 从催化剂 B 的生产批次中随机抽取 20 个样本，测得纯度的样本均值为 93.2%, 样本方差为 2.5 ($\%^2$). 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 检验下列问题.

(1) 两种催化剂生产的化合物纯度方差是否相等?

(2) 两种催化剂生产的化合物平均纯度是否有显著差异?

附录 标准正态分布函数: $\Phi(1)=0.8413$

上分位数: $t_{34}(0.05)=1.697$, $t_{34}(0.025)=2.032$, $F_{15,19}(0.025)=2.617$, $F_{15,19}(0.05)=2.234$, $F_{19,15}(0.05)=2.340$, $F_{19,15}(0.025)=2.773$

(完)

参考答案

一、 每小题 3 分.

(1) $\frac{1}{3}$ (2) A (3) C (4) 5 (5) $2\ln 2$ (6) 0.683 (7) 1 (8) C (9) B (10) A

二、 每小题 6 分. 注: 密度函数的取值范围遗漏或者不正确, 每处扣 1 分, 共 4 处.

(1) 随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x},\quad x>0;$$
$$f_Y(y)=\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y},\quad y>0.$$

(2) 由题目条件及 (1), 所求条件密度函数分别为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y\mathrm{e}^{-y}}=\frac{1}{y},\quad 0<x<y;$$
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{x-y},\quad y>x.$$

(3) 根据相关概率密度函数可分别算得

$$\mathrm{E}X=1,\quad \mathrm{E}Y=2,\quad \mathrm{Var}(X)=1,\quad \mathrm{Var}(Y)=2,\quad \mathrm{E}[XY]=3.$$

故可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$ 及 $\rho_{X,Y}=\sqrt{2}/2$.

三、 第 (1) 小题 10 分, 第 (2) 小题 6 分. 注意(1)中的变量取值范围, 若遗漏或者不正确, 扣 2 分.

(1) 设变换 $u=x, v=xy, w=xyz$, 则 $0<w<v<u<1$ 且反解可得

$$x=u,\quad y=\frac{v}{u},\quad z=\frac{w}{v}.$$

那么, 对应的Jacobi 行列式为

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} & 0\\ 0 & -\dfrac{w}{v^2} & \dfrac{1}{v}\end{vmatrix}=\frac{1}{uv}.$$

从而, 由密度变换公式可得

$$g(u,v,w)=8w\cdot\frac{1}{uv}=\frac{8w}{uv},\quad 0<w<v<u<1.$$

(2) 不独立. 无需计算各自边缘密度函数, 由上述联合密度函数 $g(u,v,w)$ 不可分离变量即知该结论 (主要受变量的取值范围影响).

四、 每小题 6 分.

(1) 以 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 表示这 n 个元件的工作寿命, 则它们为来自总体 $\mathrm{Exp}(1/\theta)$ 的一组简单随机样本, 且当 $k=1$ 时, $T=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. 从而由指数分布的性质, 可知统计量 $T \sim \mathrm{Exp}(n/\theta)$, 故 $\mathrm{E}T = \theta/n$. 由此即知 $a=n$.

(2) 由似然函数 $L(\theta)$ 可得对数似然函数为

$$l(\theta) = -k\ln\theta - \frac{1}{\theta}\Big[\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)t_k\Big].$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} l(\theta) = -\frac{k}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\Big[\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)t_k\Big] = 0,$$

即可解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_L = \frac{1}{k}\big[\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)t_k\big]$.

(3) 由指数分布的无记忆性及 (1) 中结论可知, 对任意 $1 \le i \le n$, 随机变量 t_i 可以表示成 i 个独立指数变量的和, 且各自期望分别为 $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n-1}, \cdots, \frac{\theta}{n-i+1}$, 即 t_i 的期望为 $\mathrm{E}[t_i] = \sum_{j=1}^{i} \frac{\theta}{n-j+1}$.

(4) 由 (2) 和 (3) 的结果可知,

$$\mathrm{E}[\hat{\theta}_L] = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{\theta}{n-j+1} + (n-k)\sum_{j=1}^{k}\frac{\theta}{n-j+1}\right] = \theta,$$

即 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的一个无偏估计量.

五、 每小题 6 分. 已知

$$n_A = 16, \quad \bar{x}_A = 92.5, \quad s_A^2 = 4.0; \qquad n_B = 20, \quad \bar{x}_B = 93.2, \quad s_B^2 = 2.5.$$

(1) 考虑假设检验问题: $H_{01}: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \longleftrightarrow H_{11}: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$. 由于检验统计量满足

$$\frac{1}{2.773} = \frac{1}{F_{19,15}(0.025)} = F_{15,19}(0.975) < \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{4.0}{2.5} = 1.6 < F_{15,19}(0.025) = 2.617,$$

故我们接受 H_{01}, 即可以认为两种催化剂生产的化合物纯度方差相等.

(2) 考虑假设检验问题: $H_{02}: \mu_A = \mu_B \longleftrightarrow H_{12}: \mu_A \neq \mu_B$. 计算混合方差可得

$$s_T^2 = \frac{(n_A-1)s_A^2 + (n_B-1)s_B^2}{n_A+n_B-2} = \frac{107.5}{34} \approx 3.1618.$$

由于 t 统计量满足

$$|t| = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{s_T\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} = \frac{|92.5-93.2|}{\sqrt{3.1618}\cdot\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{20}}} = 1.174 < t_{34}(0.025) = 2.032,$$

故我们也不能拒绝 H_{02}, 可认为两种催化剂生产的化合物平均纯度无显著差异.