（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院
2023 ~ 2024 学年第二学期考试试卷

课程名称： 热力学与统计物理（A）　　**课程代码：** ______

开课院系： 物理学院　　**考试形式：** 闭卷

姓名： ______　**学号：** ______　**专业：** ______

【答题中可能用到的数学关系：

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \Gamma(p) \qquad \int_0^\infty x^p e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(p)\zeta(p); \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x+1}dx = \Big(1-\frac{1}{2^{p-1}}\Big)\Gamma(p)\zeta(p),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p e^x}{(e^x+1)^2}dx = p\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x+1}dx = \Big(1-\frac{1}{2^{p-1}}\Big)\Gamma(p+1)\zeta(p),$$

其中 $\Gamma(p)$ 是欧拉 Γ 函数。$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$；当 p 是整数时 $\Gamma(p+1) = p!$；$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。$\zeta(p) = \sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ 是黎曼 ζ 函数。$\zeta(3/2) \simeq 2.612$，$\zeta(2) = \pi^2/6$，$\zeta(5/2) \simeq 1.3415$，$\zeta(3) \simeq 1.202$，$\zeta(4) = \pi^4/90$，$\zeta(5) \simeq 1.037$。】

一、　在强相对论极限下，无相互作用系统中动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子能量为 $\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$，式中 c 为真空光速。系统的体积为 V，温度为 T，且不考虑粒子全同性。

1. 求此系统的单粒子态密度。
2. 求系统的内能和熵。
3. 求系统的等容热容 C_V 和等压热容 C_p。

参考答案：

1. 态密度

$$g(\varepsilon) = \int \delta(\varepsilon - cp)\frac{d^3p d^3r}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty \delta(\varepsilon - cp)p^2 dp$$
$$= \frac{4\pi V}{h^3}\frac{p^2}{c}\Big|_{p=\varepsilon/c} = \frac{4\pi V\varepsilon^2}{h^3c^3}$$

2.

$$
\begin{aligned}
z &= \int_0^{\infty} g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\
&= \frac{4\pi V (k_B T)^3}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{8\pi V (k_B T)^3}{h^3 c^3} \\
U &= N k_B T^2 \frac{\partial \ln z}{\partial T} = 3 N k_B T \\
S &= N k_B \ln z + U/T = 3 N k_B T + N k_B \ln\Big[\frac{8\pi V (k_B T)^3}{h^3 c^3}\Big]
\end{aligned}
$$

3. 热容

$$
C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{NV} = 3 N k_B
$$

压强

$$
\begin{aligned}
p &= N k_B T \frac{\partial \ln z}{\partial V} = \frac{N k_B T}{V} \\
H &= U + pV = 4 N k_B T \\
C_p &= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{N,p} = 4 N k_B
\end{aligned}
$$

二、 一个无序系统具有 N 个粒子，每个粒子可以处在两个量子态上。第 i 个粒子的两个量子态的能量分别为 0 和 $\varepsilon_i(\varepsilon_i > 0)$。不考虑粒子之间的相互作用和粒子的全同性。体系的温度为 T。

1. 求系统的配分函数。
2. 如果所有的 ε_i 都等于 ε 的话，求系统的平均能量和熵。
3. 同上一小题，求系统的热容，并写出在高温和低温极限下热容和温度的关系。
4. 当系统具有很大的无序时，可以假设这些 ε_i 均匀的分布在 0 到 ε_M（$\varepsilon_M \gg k_B T$）之间。求这种无序系统的热容。

参考答案:

1. 系统配分函数为

$$
Z = \prod_{i=1}^{N} \Big[1 + e^{-\beta\varepsilon_i}\Big]
$$

2.

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}}{e^{-\beta\varepsilon_i} + 1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta\varepsilon_i} + 1} = \frac{N\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} + 1} \\
S &= k_B[\ln Z + U/T] = k_B \sum_i \Big[\ln\Big(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}\Big) + \frac{\beta\varepsilon_i}{e^{\beta\varepsilon_i} + 1}\Big]
\end{aligned}
$$

3. 热容

$$
\begin{aligned}
C=\frac{\partial U}{\partial T}&=\sum_i\frac{\varepsilon_i^2}{k_BT^2}\frac{e^{\beta\varepsilon_i}}{\left[e^{\beta\varepsilon_i}+1\right]^2}\\
&=\frac{N\varepsilon^2}{k_BT^2}\frac{e^{\beta\varepsilon}}{\left[e^{\beta\varepsilon}+1\right]^2}\\
&=\begin{cases}\frac{N\varepsilon^2}{k_BT^2} & k_BT\gg\varepsilon\\ \\ \frac{N\varepsilon^2}{k_BT^2}e^{-\varepsilon/(k_BT)} & k_BT\ll\varepsilon\end{cases}
\end{aligned}
$$

4. 无序时

$$
\begin{aligned}
C&=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon_M}\int_0^{\varepsilon_M}d\varepsilon_i\frac{\varepsilon_i^2}{k_BT^2}\frac{e^{\beta\varepsilon_i}}{[e^{\beta\varepsilon_i}+1]^2}=\frac{Nk_B^2T}{\varepsilon_M}\int_0^{\varepsilon_M/(k_BT)}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx\\
&\simeq\frac{Nk_B^2T}{\varepsilon_M}\int_0^{\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx=\frac{N\pi^2k_B^2T}{6\varepsilon_M}
\end{aligned}
$$

三、 沿 z 轴外加磁场 $\mathbf{B}=B\hat{e}_z$，在 $x-y$ 平面内电子运动的哈密顿量为

$$
h(\mathbf{r},\mathbf{p})=\frac{[\mathbf{p}+e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m}
$$

其中 $\mathbf{r}=(x,y,0)$、$\mathbf{p}=(p_x,p_y,0)$ 分别为电子的位置和动量，m 和 e 则分别是电子质量和电荷。$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是磁矢势，满足 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$。在强磁场下，电子运动的本征能级为 Landau 能级：$\varepsilon_n=(n+1/2)\hbar\omega_c$，其中 $n=0,1,2,3,\cdots$，$\omega_c=eB/m$ 为回旋频率。面积为 A 的系统中每个 Landau 能级的简并度 $\Omega_L=ABe/h$，h 为 Planck 常数。体系的温度取为 0K。为简单起见，本题不考虑电子自旋对能量的影响，也不考虑自旋简并度。

1. 求在没有外加磁场时，二维自由电子气的 Fermi 能 ε_F 以及总能量 $U_0(N)$ 和电子数 N 的关系。
2. 加上很强的磁场，使得所有电子都处在 $n=0$ 的 Landau 能级上。求这种情况下电子数 N 的范围，并求在此范围内系统总能量改变量 $\Delta U(N,B)=U(N,B)-U_0(N)$ 和电子数的关系。
3. 证明当电子正好填满整数个 Landau 能级时，$\Delta U(N,B)=0$。
4. 证明在保持磁场不变时，$\Delta U(N,B)$ 是电子数的周期函数，并求出 $\Delta U(N,B)$ 的表达式。

参考答案

1.

$$
\begin{aligned}
N &= \int \frac{d^2pd^2r}{h^2} = \frac{\pi A}{h^2}p_F^2 \\
\varepsilon_F &= \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2\pi mA}N \\
U &= \int \varepsilon_p \frac{d^2pd^2r}{h^2} = \frac{A\pi}{mh^2}\int_0^{p_F} p^3dp = \frac{A\pi}{4mh^2}p_F^4 \\
&= \frac{A\pi}{4h^2}\frac{h^4N^2}{\pi^2A^2} = \frac{h^2N^2}{4m\pi^2A}
\end{aligned}
$$

2. $N \leq \Omega_L$ 时，所有电子都处在 $n=0$ 的 Landau 能级上。

$$
\begin{aligned}
U(N,B) &= N\hbar\omega_c/2 = \frac{NheB}{4\pi m} \\
\Delta U(N,B) &= \frac{NheB}{4\pi m} - \frac{h^2N^2}{4m\pi^2A}
\end{aligned}
$$

3. 当电子正好占满第 ν 个 Landau 能级时，$N=(\nu+1)\Omega_L$，系统能量为

$$
\begin{aligned}
U(N,B) &= \sum_{i=0}^{\nu}(i+1/2)\hbar\omega_c\Omega_L = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\frac{\nu+1}{2}\right]\frac{heB}{2m\pi}\frac{ABe}{h} \\
&= \frac{(\nu+1)^2}{2}\Omega_L\hbar\omega_c = \frac{N^2}{2}\frac{\hbar\omega_c}{\Omega_L} = \frac{N^2}{2}\frac{\hbar eB/m}{ABe/h} = \frac{\hbar^2N^2}{4\pi mA} = U_0(N)
\end{aligned}
$$

$$\Delta U(N,B) = U(N,B) - U_0(N) = 0$$

4. $N=(\nu+1)\Omega_L+\Delta N$，$0\leq \Delta N \leq \Omega_L$

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= \Delta N(\nu+3/2)\hbar\omega_c - \{U_0(N) - U_0[(\nu+1)\Omega_L]\} \\
&= \Delta N(\nu+3/2)\hbar\omega_c - \frac{h^2}{4\pi^2mA}\left[N^2-(\nu+1)^2\Omega_L^2\right] \\
&= \Delta N(\nu+3/2)\hbar\omega_c - \frac{h^2}{4\pi^2mA}[\Delta N^2 + 2\Delta N(\nu+1)\Omega_L] \\
&= \Delta N\left[(\nu+3/2)\frac{heB}{2\pi m} - 2\frac{h^2}{4\pi^2mA}(\nu+1)\frac{ABe}{h}\right] - \frac{h^2\Delta N^2}{4\pi^2mA} \\
&= \frac{\Delta NheB}{4\pi m} - \frac{h^2\Delta N^2}{4\pi^2mA}
\end{aligned}
$$

因此 ΔU 只和 ΔN 有关，即 ΔU 是 N 的周期函数。

四、 体积为 V 的容器中有 N 个质量为 m 的原子。在静止时，原子可以发射频率为 ω_0 的电磁波。容器外有一探测器，可以探测原子发出的电磁波。由于 Doppler 效应当原子沿 x 方向运动速度为 v_x 时，探测器监测到的频率 ω 为

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = \frac{v_x}{c}$$

其中 c 是光速。体系的温度为 T。

1. 求原子的单粒子配分函数。
2. 求原子的速度分布。
3. 求由于 Doppler 效应导致的频率展宽 $\Delta\omega^2$。

参考答案

1. 单粒子配分函数

$$
\begin{aligned}
z &= \int e^{-\beta\varepsilon_p}\frac{d^3pd^3h}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2mk_BT)}dp \\
&= \frac{4\pi V(2mk_BT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = V\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$

2. 速度分布函数

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{p}) &= \frac{N}{V}(2\pi mk_BT)^{-3/2}e^{-p^2/(2mk_BT)} \\
f(\mathbf{v}) &= m^3 f(\mathbf{p}) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2k_BT)}
\end{aligned}
$$

3. 频率展宽

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega^2 &= \frac{\int[\omega(v_x)-\omega_0]^2 f(\mathbf{v})d^3vd^3r}{\int f(\mathbf{v})d^3vd^3r} \\
&= \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2\frac{\int_{-\infty}^\infty v_x^2 e^{-mv_x^2/(2k_BT)}dv_x}{\int_{-\infty}^\infty e^{-mv_x^2/(2k_BT)}dv_x} \\
&= \frac{2k_BT}{m}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2\frac{\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx}{\int_0^\infty e^{-x^2}dx} = \frac{k_BT}{m}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2
\end{aligned}
$$

五、 体积为 V 的光晶格中有 N 个格点。自旋为零、质量为 m 的玻色子在晶格中可以有两种状态：1) 被约束在某个格点上，此时能量为 $-\varepsilon$ （$\varepsilon > 0$），由于相互作用，一个格点上最多只能有一个粒子。2) 自由地在整个空间移动，此时粒子可以看成是自由粒子，色散关系为 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/(2m)$，其中 $\mathbf{p}$ 是粒子动量。不考虑其它相互作用，系统温度为 T。

1. 假设系统的化学势为 μ，求系统的巨配分函数的对数 $\ln\Xi$。可以保留积分表达式，不必求出具体的积分。
2. 同上一小题，求处在格点上的粒子数。
3. 求发生玻色 - 爱因斯坦凝聚的最低粒子密度。

参考答案:

1. 巨配分函数

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \prod_{i=1}^{N}\Big[1+e^{-\beta(-\varepsilon-\mu)}\Big]\prod_{\mathbf{pr}}\Big[1+e^{-\beta(\varepsilon_p-\mu)}+e^{-2\beta(\varepsilon_p-\mu)}+\cdots\Big] \\
&= \Big[1+e^{-\beta(-\varepsilon-\mu)}\Big]^N\prod_{\mathbf{pr}}\Big[1-e^{-\beta(\varepsilon_p-\mu)}\Big]^{-1} \\
\ln\Xi &= N\ln[1+e^{-\beta(-\varepsilon-\mu)}\Big] - \int\frac{d^3pd^3r}{h^3}\ln\Big[1-e^{-\beta(\varepsilon_p-\mu)}\Big] \\
&= N\ln[1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}\Big] - \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty \ln\Big[1-e^{-\beta(\varepsilon_p-\mu)}\Big]p^2dp \\
&= N\ln[1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}\Big] - 2\pi V\Big(\frac{2mk_BT}{h^2}\Big)^{3/2}\int_0^\infty \ln\Big[1-e^{-x+\beta\mu}\Big]x^{1/2}dx
\end{aligned}
$$

2. 处在格点中的粒子数 n_L

$$
\begin{aligned}
N_L &= -\frac{\partial\ln\Xi}{\partial(-\beta\varepsilon)} = N\frac{e^{\beta(\varepsilon+\mu)}}{e^{\beta(\varepsilon+\mu)}+1} \\
&= \frac{N}{e^{-\beta(\varepsilon+\mu)}+1}
\end{aligned}
$$

3. 动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子数为

$$
n_{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\ln\Xi}{\partial(\beta\varepsilon_{\mathbf{p}})} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p-\mu)}-1}
$$

发生玻色 - 爱因斯坦时，$\mu=0$，粒子数最小值为

$$
\begin{aligned}
N_t = N_L + N_F &= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \int\frac{d^3pd^3r}{h^3}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p}-1} \\
&= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty\frac{p^2}{e^{p^2/(2mk_BT)}-1}dp \\
&= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \frac{4\pi V(2mk_BT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty\frac{x^2}{e^{x^2}-1}dx \\
&= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \frac{2\pi V(2mk_BT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty\frac{t^{1/2}}{e^{t}-1}dt \\
&= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \frac{2\pi V(2mk_BT)^{3/2}}{h^3}\Gamma(\frac{3}{2})\xi(\frac{3}{2}) \\
&= \frac{N}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \frac{V(2\pi mk_BT)^{3/2}}{h^3}\xi(\frac{3}{2}) \\
\rho_t = \frac{N_t}{V} &= \frac{N}{V}\frac{1}{e^{-\beta\varepsilon}+1} + \Big(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\Big)^{3/2}\xi(3/2)
\end{aligned}
$$