中国科学技术大学电动力学期终考试试题卷(2024)

姓名： Reference Solutions

学号：

成绩：

提示：

- 闵氏空间$\mathbb{M}_4$中洛仑兹推动变换$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$的非零矩阵元是：

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

  式中$\boldsymbol{\beta} = \beta^i \boldsymbol{e}_i$为无量纲的牵连速度，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. 电磁场强度在洛仑兹推动变换下的变换法则是：

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta} + \gamma c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{B}' = \gamma\boldsymbol{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}$$

- 3维欧氏空间$\mathbb{E}_3$中存在着如下矢量分析恒等式：

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{r^3}\right] + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}),$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{r^3}\right] = -\frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

  式中$\boldsymbol{a}$是一个非零的常矢量，$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$为场点相对于坐标原点的位置矢量.

- 电磁场的能量动量张量是：

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

  其中$u = -\Theta^{00}$ 称为电磁场的能量体密度，Θ^{0i}分量称为电磁场的能流密度矢量，$\boldsymbol{S} = -c\Theta^{0i}\boldsymbol{e}_i$.

- Lorenz规范下无界空间中的推迟势：

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(t-r/c,\boldsymbol{x}')}{r}, \quad \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3x' \frac{\boldsymbol{j}(t-r/c,\boldsymbol{x}')}{r}$$

  其中t'是隐函数方程$t' = t - r(t')/c$的解. 在远场区，分布在小区域($L \sim \sqrt[3]{V}$)中的交变电流($k = \omega/c$)激发的推迟矢势的近似表达式为：

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} - i\frac{\mu_0 k\, e^{ikR}}{4\pi R^2}\left(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x} + \frac{1}{6}x_i\boldsymbol{e}_k\dot{\mathscr{D}}^{ik}\right) + \mathscr{O}\left((kL)^2\right)$$

式中$R=|\boldsymbol{x}|$. 电荷电流体系的多极矩分别是：

$$\boldsymbol{p}=\int_V \mathrm{d}^3x'\,\rho(t,\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}',\quad \widetilde{\mathscr{D}}_{ij}=3\int_V \mathrm{d}^3x'\,x_i'x_j'\rho(t,\boldsymbol{x}'),\quad \boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}').$$

- 设电荷电流分布在区域V中，$S=\partial V$是V的边界面，则存在如下普适的电磁学恒等式：

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\Big[f(t,\boldsymbol{r})g(t,\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})\Big]=0$$

式中$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})$是电流密度矢量，$f(t,\boldsymbol{r})$与$g(t,\boldsymbol{r})$是两个任意的标量函数.

- 球坐标系中的基矢的性质：

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_r=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\right)=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\theta}\right)=0,$$
$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\right)=0$$

- 在3维欧氏空间$\mathbb{E}_3$中，我们默认使用$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$表示整体笛卡尔直角坐标系的单位基矢，

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},\quad \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

球坐标系基矢与笛卡尔直角坐标系基矢之间的关系可表为：

$$\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_1\sin\phi+\boldsymbol{e}_2\cos\phi,\qquad \boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_3\cos\theta+\boldsymbol{e}_1\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\sin\theta\sin\phi,$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_3\sin\theta+\boldsymbol{e}_1\cos\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\cos\theta\sin\phi$$

或者等价地，

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta,\qquad \boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi,$$
$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$$

- 球谐函数：

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi},\qquad -l\le m\le l$$

其中$P_l^m(\cos\theta)$为缔合勒让德多项式. 球谐函数的正交性公式和完备性条件分别为：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\ \sin\theta Y^*_{lm}(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta',\phi')=\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

几个低阶球谐函数的显示表达式是：

$$Y_{00}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{10}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi},$$
$$Y_{20}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1),\quad Y_{2,\pm1}(\theta,\phi)=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi},$$
$$Y_{2,\pm2}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm2i\phi}$$

简答(40分)：

1. 自由电磁场的动力学由如下拉格朗日密度

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

描写，$F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$，此处$A_\mu(x)$是一个4-矢量场，称为电磁场的规范势. 请问上述拉格朗日密度是在哪个规范下表出的(5分)?

答：此拉氏密度具有规范变换$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\alpha(x)$下的不变性。所以，它适用于任一规范。

2. 坐标原点($\boldsymbol{r}=0$)被一电偶极矩为$\boldsymbol{p}$的电偶极子所占据，其激发的静电场电场强度分布可表为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left[3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{p}\right]-\frac{\boldsymbol{p}}{3\epsilon_0}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

请写出此电偶极子的电荷体密度$\rho(\boldsymbol{r})$(2分). 空间各场点处电场强度的散度与旋度分别是多少(3分)?

答：电偶极子的电荷体密度为$\rho(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$. 电场强度分布的散度与旋度分别为$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})/\epsilon_0$和$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$.

3. 磁偶极子与外静磁场$\boldsymbol{B}$之间的相互作用能量是$W=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$，这里$\boldsymbol{\mu}$是磁偶极子的磁偶极矩矢量. 倘若把磁偶极子置于非均匀外磁场$\boldsymbol{B}$中，请写出外磁场施加给磁偶极子的洛仑兹力(5分) .

答：磁偶极子与外磁场之间的相互作用有效势能为$U=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$. 所以，外磁场施加给磁偶极子的洛伦兹力是：$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{\nabla}U=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$. 答案$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$也算正确.

4. 库仑规范中有无推迟势(2分)? 若有，请写出无界空间中推迟势的表达式(3分).

答：库仑规范中有推迟势：

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}_T(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c,\ \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

式中$\boldsymbol{j}_T(t',\boldsymbol{x}')$是电流密度矢量的横分量(无散分量)。

5. 设介质1和介质2分别为寻常的绝缘电介质和导体(视为理想导体). 请写出电磁波在二者分界面S上电场强度$\boldsymbol{E}$、磁场强度$\boldsymbol{H}$满足的边界条件(5分)?

答： 理想导体的特点是体内无电磁场分布。 所以，电磁波在绝缘电磁介质和导体分界面 S 上的边界条件是：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1\Big|_S=0,\qquad \frac{\partial E_{1n}}{\partial n}\Big|_S=0,\qquad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1\Big|_S=\boldsymbol{\alpha}$$

式中$\boldsymbol{n}$为分界面的单位法矢量，从导体指向介质。

6. 在电磁相互作用体系中，与能量动量守恒定律$\partial_\mu\left[\Theta^{\mu\nu}(x)+T^{\mu\nu}_{\text{matter}}(x)\right]=0$ 相联系的对称性是什么对称性(5分)? 这里约定$\Theta^{\mu\nu}(x)$和$T^{\mu\nu}_{\text{matter}}(x)$分别是电磁场与电荷电流系统的能量动量张量.

答：时空平移对称性。

7. 设$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$分别为电磁场的电场强度与磁感应强度分布，由它们可以构造出3-标量：

$$w=\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2-\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$$

请问w的取值是否与惯性参考系的选择无关 (3分)? 是否可以将w解释为电磁场的能量体密度(2分)?

答：w的取值与惯性系的选择无关。这是因为

$$w=\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\boldsymbol{E}^2-\frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0\epsilon_0}\right)=\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2\right)$$

是一个4-标量。因为$w\neq-\Theta^{00}$，不能把w解释为电磁场的能量体密度。

8. 时变电流$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$分布在区域$V$中，$P$是$V$中的某个场点，其相对于坐标原点$O$(也取在$V$内)的位置矢量为$\boldsymbol{r}=x_i\boldsymbol{e}^i$，$x_i$是$P$点的笛卡尔直角坐标. 请把体积分

$$\int_V x_iJ_j(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3x$$

按照电流分布的电多极矩、磁多极矩以及它们的时间导数表出(5分).

答：利用电磁学恒等式

$$\int_V \mathrm{d}^3x(x_iJ_j+x_jJ_i)=\frac{1}{3}\dot{\mathscr{D}}_{ij}$$

可知：

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3x\, x_iJ_j&=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x(x_iJ_j-x_jJ_i)+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x(x_iJ_j+x_jJ_i)\\&=\epsilon_{ijk}\left[\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r})\right]^k+\frac{1}{6}\dot{\mathscr{D}}_{ij}\\&=\epsilon_{ijk}m^k+\frac{1}{6}\dot{\mathscr{D}}_{ij}\end{aligned}$$

式中

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r})$$

是电流分布的磁偶极矩矢量。

计算(60分)：

9. 设u和$\boldsymbol{S}$分别表示电磁场的能量体密度和能流密度矢量. 试分析

$$\boldsymbol{S}^2 - c^2 u^2$$

在洛仑兹推动变换下的变换性质(20分).

解：电磁场的能量体密度和能流密度矢量分别是

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

所以，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^2 &= \frac{1}{\mu_0^2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \frac{1}{\mu_0^2}\boldsymbol{E}\cdot\Big[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\Big] \\
&= \frac{1}{\mu_0^2}\boldsymbol{E}\cdot\Big[\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\Big] \\
&= \frac{1}{\mu_0^2}\Big[\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2\Big]
\end{aligned}$$

$$u^2 = \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\boldsymbol{B}^2 + \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2 = \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0^2 c^2}\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{B}^2$$

以上两式联立可知：

$$\boldsymbol{S}^2 - c^2u^2 = -\frac{1}{\mu_0^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2 - \frac{c^2}{4\mu_0^2}\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right)^2$$

注意到$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2$是两个著名的4-标量，我们得到结论：$\boldsymbol{S}^2 - c^2u^2$在洛伦兹推动变换下保持不变。

10. 点电荷q沿z轴相对于坐标原点做角频率为$\omega = ck$的简谐振动，其在初始时刻($t=0$)的电偶极矩矢量为$\boldsymbol{p}_0 = ql\boldsymbol{e}_3$.

- 计算此振荡电偶极子激发的辐射电磁场场强并将它们在球坐标系中表出(10分).
- 计算此振荡电偶极子激发的辐射电磁场在t时刻($t>0$)能流密度矢量与辐射功率的瞬时值(5分).
- 计算平均辐射功率(5分).

解：振荡偶极子的电偶极矩矢量可写成如下复数形式，

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t} = ql\boldsymbol{e}_3 e^{-i\omega t}$$

它激发的电偶极辐射电磁场的推迟矢势为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} \\
&= -i\frac{\mu_0\omega\, ql\, e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi R}\boldsymbol{e}_3 \\
&= -i\frac{\mu_0\omega\, ql\, e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi R}\big(\cos\theta\boldsymbol{e}_R - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\big)
\end{aligned}$$

辐射场的磁感应强度与电场强度分别为:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) \\
&= ik\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{\mu_0\omega^2\, ql\, e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi cR}\boldsymbol{e}_R\times\big(\cos\theta\boldsymbol{e}_R-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\big) \\
&= -\frac{\mu_0\omega^2\, ql\, e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi cR}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\
\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) &= \frac{ic^2}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \\
&= -c\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \\
&= -\frac{\mu_0\omega^2\, ql\, e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi R}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
$$

$t>0$时刻能流密度矢量的瞬时值是:

$$
\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0\omega^4q^2l^2\sin^2\theta}{16\pi^2cR^2}\boldsymbol{e}_R\cos^2(kR-\omega t)
$$

相应的辐射功率瞬时值是:

$$
P=\oint_S R^2\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0\omega^4q^2l^2}{6\pi c}\cos^2(kR-\omega t)
$$

其在一个周期内的平均值是:

$$
\langle P\rangle=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}P\mathrm{d}t=\frac{\mu_0\omega^4q^2l^2}{12\pi c}
$$

11. 一列平面电磁波沿z轴方向传播，其电场强度矢量可表为如下复数形式:

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0(\boldsymbol{e}_1-i\boldsymbol{e}_2)\exp[i(kz-\omega t)]
$$

式中$k=\omega/c$.

- 请指明此平面电磁波的极化特性(5分).
- 请确定出此平面电磁波磁感应强度的复数形式(5分).
- 请求出此平面电磁波的平均能流密度矢量$\langle\boldsymbol{S}\rangle$(5分).
- 请为此平面电磁波赋予一组电磁势$\phi(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，并明确指出所选择的规范(5分).

解: 电场强度复矢量的实部是:

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0\Big[\boldsymbol{e}_1\cos(\omega t-kz)-\boldsymbol{e}_2\sin(\omega t-kz)\Big]
$$

我们看到: 若较早时刻t_1的位相$\omega t_1-kz=0$，则$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{e}_1$. 若下一时刻$t_2$的位相$\omega t_2-kz=\pi/2$，则$\boldsymbol{E}=-E_0\boldsymbol{e}_2$. 这表明逆着电磁波传播方向看，电场强度矢量以角速度ω顺时针旋转。所以，此平面电磁波的极化特性是右旋偏振。

对于时谐电磁波而言，Faraday电磁感应定律表达为:

$$
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=i\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t),\qquad\rightsquigarrow\quad\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{i}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)
$$

此平面电磁波的磁感应强度和平均能流密度矢量分别为:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{k}{\omega}\boldsymbol{e}_3 \times E_0(\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2)\exp[i(kz-\omega t)] \\
&= \frac{E_0}{c}(\boldsymbol{e}_2 + i\boldsymbol{e}_1)\exp[i(kz-\omega t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\Big[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t))\Big] \\
&= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}\big[(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2) \times (\boldsymbol{e}_2 + i\boldsymbol{e}_1)\big] \\
&= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

注意到场强与电磁势之间的关系，$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. 我们可以试设此平面电磁波的标势 $\phi = 0$，矢势满足$\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{A}$. 换言之，

$$
\phi(t,\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{i}{\omega}E_0(\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2)\exp[i(kz-\omega t)]
$$

显然， 这组电磁势是在库仑规范中写出的，$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) = 0$. 也可以认为选择的是Lorenz规范.