《理论力学 A》（2024 年秋季）第一次期中考试

2024 年 10 月 29 日 14:00-15:30 (90 分钟)

一、变分法与莫陪督原理 (25 分) 莫陪督原理说给定空间中的两个点 A 和 B ，能量（守恒）为 E 的粒子的轨道由以下的作用量取极值决定；

$$S=\int_A^B p(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_A^B \sqrt{2m(E-V(x,y,z))}\mathrm{d}s$$

其中 V 为粒子的势能，s 为粒子轨道的长度. 考虑粒子在万有引力场中的抛体运动，其中 x 为水平坐标，y 为垂向坐标（垂直向上），粒子的势能函数为 $V=mgy$. 试根据变分原理 $\delta S=0$，得到欧拉-拉格朗日方程以及轨道满足的方程，进一步积分得到粒子的运动轨道.

将 $V=mgy$ 代入作用量，发现作用量仅为 y 坐标的泛函：

$$S[y]=\int_A^B \sqrt{2m(E-mgy)}\mathrm{d}s$$

故其变分可以表示为

$$\begin{aligned}\delta S&=S[y+\delta y]-S[y]\\&=\int_A^B [\sqrt{2m(E-mgy)}-\sqrt{2m(E-mg(y+\delta y))}]\mathrm{d}s\\&=\int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{2m(E-mgy)}\right)\delta y\mathrm{d}s\\&=\int_A^B \left(-mg\sqrt{\frac{m}{2(E-mgy)}}\right)\delta y\mathrm{d}s\end{aligned}$$

二、最小作用量原理 (25 分) 讨论相空间中的最小作用量原理. 相空间就是由系统的广义坐标 (q_α) 和正则动量 (p_α) 张成的 $2s$ 为流形（空间）. 假定系统的哈密顿量为 $H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$，引入如下作用量:

$$S[q_\alpha, p_\alpha] \equiv \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}_\alpha p_\alpha - H) \mathrm{d}t$$

即 $S[q_\alpha, p_\alpha]$ 是定义在向空间的泛函. 分别对 q_α, p_α 变分:

$$q_\alpha \to q_\alpha + \delta q_\alpha, \quad p_\alpha \to p_\alpha + \delta p_\alpha$$

这里 δq_α 与 δp_α 是独立的. 系统的初值和终值条件分别为 $\delta q_\alpha(t_0) = 0$, $\delta q_\alpha(t_1) = 0$. 试根据最小作用量原理推导出系统的动力学方程. 请问: 为什么我们不需要 $\delta p_\alpha(t_0) = 0$, $\delta p_\alpha(t_1) = 0$ 这样的初值和终值条件?

直接对作用量 S 进行变分:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{(\dot{q}_\alpha + \delta\dot{q}_\alpha)(p_\alpha + \delta p_\alpha) - H(q_\alpha + \delta q_\alpha, p_\alpha + \delta p_\alpha, t) - [\dot{q}_\alpha p_\alpha - H(q_\alpha, p_\alpha, t])\right\} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha + \left[q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right]\delta p_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\alpha p_\alpha)\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

考虑边界条件 $\delta q_\alpha(t_0) = 0$, $\delta q_\alpha(t_1) = 0$，最终得到:

$$\delta S \simeq \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha + q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right] \mathrm{d}t$$

为满足 $\delta S = 0$，应有:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \\[2em]
\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = q_\alpha
\end{cases}$$

δS 的被积函数中对时间的全导数项（边界项）为 $\delta q_\alpha p_\alpha$，故无需考虑 δp_α 的边界条件.

三、拉格朗日力学 (25 分) 讨论行星在球对称太阳引力场中的运动. 在牛顿力学框架内，为了模拟广义相对论效应，Paczynski & Witta (1980) 提出著名的牛顿势：

$$V(r) = -\frac{GM_\odot}{r - R_s}$$

其中 $R_s \equiv 2GM_\odot/c^2$ 为太阳的 Schwarzschild 半径.

1. 写出行星的拉格朗日量，并根据欧拉-拉格朗日方程得到行星运动的动力学方程；
2. 得到所有的首积分（运动积分），以及径向运动的等效势，大致画出角动量不为零时等效势的示意图.

---

1. 考虑在球坐标 $\{r, \phi, \theta\}$ 中描述行星的运动，则行星的拉格朗日量：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - mV(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + \frac{GmM_\odot}{r - \frac{2GM_\odot}{c^2}}$$

Euler-Lagrange Eq.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} \Longrightarrow \ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - \frac{GM_\odot}{(r - R_s)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Longrightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Longrightarrow \frac{(r^2\sin^2\theta\phi)}{\mathrm{d}t} = 0$$

四、运动积分与对称性 (25 分) 一维谐振子的拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

1. 验证在如下的双参数 (A, B) 变换下,

   $$x' = x + A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

   系统的作用量不变（对称性!）;
2. 利用以上发现的对称定找到系统的两个运动积分，并解释他们的物理含义;
3. 利用以上的两个运动积分，写出谐振子的解: $x = x(t)$.