

2024 秋理论力学(A)期中考试

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试；
2. 考试范围：运动学、拉格朗日力学、小振动。

解答题

1. (12 分) 已知一个六维场 $\psi : \{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, 场的拉格朗日密度为：

$$\mathcal{L} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{B} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 是已知的电流密度分布, 求场的演化方程.

2. (18 分)

- (1) 已知一个一维势场 $U = D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, 其中 $D, \alpha > 0$. 画出粒子在场中的速度-位置的典型相图, 并求解粒子在平衡位置 $x = 0$ 附近的运动周期; (12 分)
- (2) 已知一个一维势场 $U = -kx^2$, 其中 $k > 0$, 画出粒子在场中的速度-位置的典型相图. (6 分)

3. (25 分) 考虑一个带电粒子在电磁场中运动，其中电场强度 $\mathbf{E} = E\hat{x}_2$ ，磁场强度 $\mathbf{B} = B\hat{x}_3$ ，粒子的质量为 m ，电荷量为 e .

(1) 已知粒子的广义势能可以写为 $U = m\omega x_2 \dot{x}_1 - m\omega(x_1 - 2v_E t)\dot{x}_2$ ，试确定常数 ω, v_E ；

(2) 用广义坐标 $q_1 = x_1 - v_E t, q_2 = x_2, q_3 = x_3$ 描述粒子的运动，试证明粒子的拉格朗日量可以写为

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + m\omega(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)$$

并求出 $L(q, \dot{q}, t)$ 对应的雅可比积分 $h(q, \dot{q}, t)$.

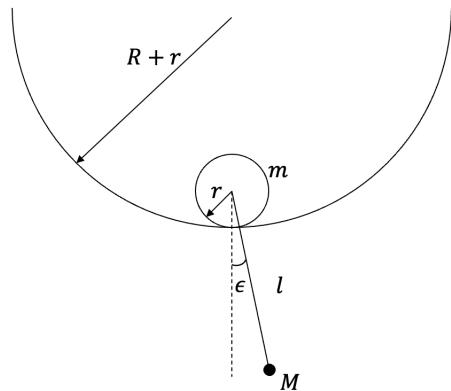
(3) 对粒子进行坐标变换 $Q_1 = q_1 \cos \theta - q_2 \sin \theta, Q_2 = q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta, Q_3 = q_3$ ，试证明该变换是反对称变换，并写出运动常数.

(4) 对粒子进行做变换 $\xi_1 = q_1 \cos \omega t - q_2 \sin \omega t, \xi_2 = q_1 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t, \xi_3 = q_3$ ，写出该变换下的三个运动常数.

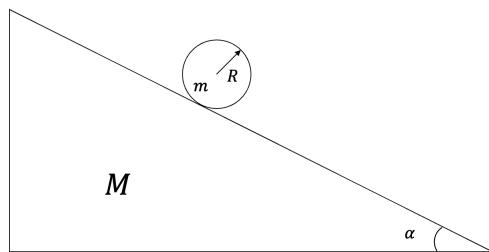
4. (20 分) 如下图所示，在一个半径为 $R + r$ 的半圆槽中放有一个底面半径为 r 的圆柱，圆柱质量为 m ，圆柱中心用轻质细绳连接一个质量为 $M = \frac{m}{2}$ 的小球，细绳的半径为 $l = \frac{4}{3}R$ 。现在将小球拉起，细绳绷直拉开一个小角度 ϵ 释放，已知运动过程中圆柱与半圆槽间没有相对滑动，求：

(1) 系统的简正频率和简正模；

(2) 刚释放时圆柱与小球各自的加速度.



5. (16 分) 如下图所示, 在一个质量为 M 的斜劈上放有一个质量为 m 的球, 斜劈底部光滑, 球的半径为 R , 运动过程中球不滑动. 试用拉格朗日乘子法求斜劈的加速度和球受到的摩擦力. 广义坐标选用斜劈向左运动的位移 x 、球沿斜劈向下的位移 y 和球滚动转过的角度 θ .



6. (14 分) 如下图所示, 六个质量为 m 的小球用铰链和轻杆拼接成一个正六边形, 杆长为 a . 在初始时刻对六边形的其中一条边的中点垂直施加一个作用时间很短的力, 力给系统的冲量为 I , 求最终系统获得的动能.

