中国科学技术大学　2025 年 1 月 12 日 8:30 - 10:50

2024秋理论力学(A)期末考试

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试；
2. 考试范围：中心力与散射、哈密顿力学、刚体动力学.

一、力学量的泰勒展开 (15 分)

已知体系的哈密顿量为

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

试用力学量的泰勒展开求 $q_1^2(t)$ 和 $q_1(t) + q_2(t)$ 随时间的演化. 已知 $t = 0$ 时，$q_1 = p_1 = 1$, $q_2 = p_2 = 0$.

二、哈密顿正则方程 (15 分)

已知某一维体系的运动学方程可以写为

$$\ddot{q}+F(q)\dot{q}^2+G(q)=0$$

其中 $F(q),G(q)$ 是已知函数.

1. 对于上述体系，我们取哈密顿量为

$$H=\frac{p^2}{2f(q)}+g(q)$$

   其中 $f(q)=\mathrm{e}^{-2\int F(q)\mathrm{d}q}$，$g(q)$ 是某种形式的函数. 试证明运动学方程可由哈密顿量 H 对应的正则方程导出，并求出 $g(q)$ 的具体形式；

2. 若某一维体系的运动学方程为 $\ddot{q}+\dot{q}^2+q=0$，试由上述结果写出体系对应的哈密顿量.

三、正则变换 (20 分)

已知某一维体系中质量为 m 的粒子哈密顿量为 $H=\dfrac{p^2}{2m}-mgq$ 的体系，考虑正则变换

$$Q=q-\frac{pt}{m}+\frac{gt^2}{2},\quad P=p-mgt$$

1. 求正则变换对应的第二类生成函数 $F_2(q,P,t)$；

2. 根据第二类生成函数 F_2 求出变换后的新哈密顿量（用 Q,P,t 表示）.

四、哈密顿-雅可比方程 (10 分)

已知质量为 m 电荷量为 e 的带电粒子在静磁场 $\vec{B}=B\hat{e}_z$ 中的哈密顿量可以写成如下形式（采用高斯单位制）：

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2$$

在合适的规范下我们选取 $\vec{A}=(-By,0,0)$.

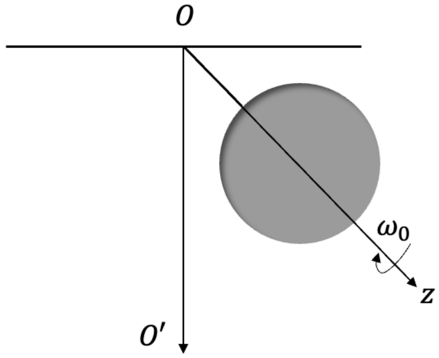
1. 求体系的哈密顿特征函数所满足的条件，即哈密顿主函数 $S=W+T$ 中 $W(x,y,z)$ 所满足的方程；

2. 利用分离变量法，求出 $W(x,y,z)$ 的具体形式；

3. 利用哈密顿-雅可比方程求解粒子位置随时间的演化，即 $x(t),y(t),z(t)$ 的具体形式.

五、刚体动力学 (20 分)

如图所示，半径为 R 、质量为 m 的均匀球体与顶部 O 被轻杆连接，顶点 O 到球体中心 C 的距离为 $l=2R$. 以球心为原点建立本体系，OC 连线方向为 z 轴，球以角速度 $\vec{\omega}=\omega_0\hat{z}$ 自转. 从 O 点作竖直向下的直线 OO'，定为空间系的 z' 轴. 球的章动角 $\theta=\theta_0$.



1. 写出球在本体系的转动惯量张量；（提示：球的主转动惯量为 $\dfrac{2}{5}mR^2$）
2. 写出球的哈密顿量，证明进动角、自转角对应的共轭动量 p_φ, p_ψ 为守恒量，并计算其具体值；
3. 若 $\theta_0=60^\circ$, $R\omega_0^2=132g$，其中 g 为重力加速度，求球在运动过程中动能的最大值.

六、中心力与散射 (20 分)

已知空间中存在一中心力，其势能为半径为 R 的球形势阱，即势能函数满足

$$U(r)=\begin{cases}-U_0, & 0\leqslant r\leqslant R\\ 0, & r>R\end{cases}$$

已知粒子从无穷远处射入，无穷远处粒子动量为 p_0，动量臂 $b<R$ 时粒子会进入势阱，势阱中粒子的动量为 $p=2p_0$.

1. 画出粒子在 $b<R$ 时的运动轨迹，并计算粒子进入势阱后距离力心的最小距离 d;
2. 写出散射角 Θ 与动量臂 b 之间的关系 $\Theta(b)$，并画出 $\Theta(b)$ 的图像;
3. 利用 $\Theta(b)$ 反解出 $b(x)$，其中 $x=\cos\dfrac{\Theta}{2}$;
4. 求微分散射截面 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 与散射角 Θ 的关系，并画出图像;
5. 将 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 对立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 积分计算散射截面 σ.