2024中国科大量子力学A期中考试试题卷, 参考解答

姓名 **学号** **成绩**

1. (a) 如下给定的函数中哪些函数可以是位置表象中某量子力学体系的候选波函数(5分)? 其中有无彼此等价的波函数(5分)?

$$\psi_1(x,t)=\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp\left(-i\frac{\hbar\pi^2 t}{2\mu a^2}\right)$$
$$\psi_2(x,t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp\left(-i\frac{\hbar\pi^2 t}{2\mu a^2}\right)$$
$$\psi_3(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}-\frac{\hbar\pi^2 t}{2\mu a^2}\right)$$

(b) 请写出量子力学基本对易关系(5分)并据此计算$\left[\hat{x}^2,\hat{p}\right]$(5分). (c) 请写出位置表象中等效动量算符$\hat{P}$的显示表达式(5分).

解:

- $\psi_1(x,t)$和$\psi_2(x,t)$是量子力学体系合格的候选波函数，它们彼此等价。
- 量子力学基本对易关系是$\left[\hat{x},\hat{p}\right]=i\hbar$. 由此可推论:

$$\left[\hat{x}^2,\ \hat{p}\right]=\hat{x}\left[\hat{x},\ \hat{p}\right]+\left[\hat{x},\ \hat{p}\right]\hat{x}=2i\hbar\,\hat{x}$$

- 位置表象中等效动量算符的表达式是$\hat{P}=-i\hbar\,\partial/\partial x$.

2. 某量子力学体系具有两个力学量A与B，它们分别用厄米算符$\hat{A}$和$\hat{B}$描写. 假设$\hat{A}$与$\hat{B}$的本征值均非简并. $\hat{A}$的本征值谱是$\{a_1,a_2\}$，相应的归一化本征矢量分别是$|\psi_1\rangle$与$|\psi_2\rangle$. $\hat{B}$的本征值谱是$\{b_1,b_2\}$，相应的归一化本征矢量分别是$|\phi_1\rangle$与$|\phi_2\rangle$. 已知两组本征态矢量之间存在关系:

$$|\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\,|\phi_1\rangle+2\,|\phi_2\rangle\Big],\qquad |\psi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[2\,|\phi_1\rangle-|\phi_2\rangle\Big]$$

(a) 倘若对体系的力学量A做了一次测量且获得了测量值a_1. 请问此次测量刚完成后体系处在什么态(5分)? (b) 倘若接下来准备测量力学量B. 请问有哪些可能的测量值(5分)、各个测量值出现的概率分别是多少(5分)? (c) 等待力学量B的测量完成后，假设重新测量力学量A. 请问获得测量值为a_1的概率是多少(10分)?

解:

- 此次测量完成后，体系处在由态矢量$|\psi_1\rangle$描写的量子态。
- 接下来测量力学量B，可能的测量值是b_1和b_2. 测量值b_1出现的概率是$P_1=\frac{1}{5}=0.2$, b_2出现的概率是$P_2=\frac{4}{5}=0.8$.
- 由于

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\,|\psi_1\rangle + 2\,|\psi_2\rangle\Big], \qquad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[2\,|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\Big]$$

倘若第二步测量力学量B时获得的测量值为b_1，则接下来重新测量力学量A获得测量值a_1的概率是：

$$P_1' = \Big|\frac{1}{\sqrt{5}}\Big|^2 = \frac{1}{5} = 0.2$$

倘若第二步测量力学量B时获得的测量值为b_2，则接下来重新测量力学量A获得测量值a_1的概率是：

$$P_2' = \Big|\frac{2}{\sqrt{5}}\Big|^2 = \frac{4}{5} = 0.8$$

3. 某量子力学体系具有两个力学量F与G，它们分别用厄米算符$\hat{F}$和$\hat{G}$描写．假设$\hat{F}$与$\hat{G}$的本征值均非简并．$\hat{F}$的本征值谱是$\{1,\ 2\}$，相应的归一化本征矢量分别是$|\psi_1\rangle$与$|\psi_2\rangle$．G的本征值谱是$\{1,\ -1\}$，相应的归一化本征矢量分别是$|\phi_1\rangle$与$|\phi_2\rangle$．倘若两组本征态矢量之间存在关系：

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\phi_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\phi_2\rangle, \qquad |\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\phi_1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\phi_2\rangle$$

(a) 倘若选择G表象，请写出两个力学量矩阵及其本征函数的显示形式(5分)． (b) 倘若选择F表象，请写出两个力学量矩阵及其本征函数的显示形式(5分)． (c) 请构造出F表象与G表象之间的表象变换矩阵和逆矩阵(5分)． (d) 倘若对体系的这两个力学量进行测量，它们是否可以同时有确定的测量值(5分)？ 为什么(5分)？

解：

- 选择G表象，则Hilbert空间的正交归一基矢选择为$\{|\phi_i\rangle;\ i=1,2\}$．力学量算符$\hat{G}$由如下实对角矩阵表示：

$$G^{(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

注意到$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$，我们看到$G$属于本征值$g_1 = 1$和$g_2 = -1$的本征函数分别为：

$$\phi_1^{(G)} = \begin{bmatrix} \langle\phi_1|\phi_1\rangle \\ \langle\phi_2|\phi_1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_2^{(G)} = \begin{bmatrix} \langle\phi_1|\phi_2\rangle \\ \langle\phi_2|\phi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

按照题设的态叠加关系，

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_2\rangle, \qquad |\phi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi_2\rangle$$

我们有：

$$\begin{aligned} \hat{F}\,|\phi_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi_1\rangle + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_2\rangle \\ &= \frac{5}{3}|\phi_1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|\phi_2\rangle \\ \hat{F}\,|\phi_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_1\rangle - 2\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi_2\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}|\phi_1\rangle + \frac{4}{3}|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

力学量算符$\hat{F}$在G表象基矢间的矩阵元$F_{ij} = \langle\phi_i|\hat{F}\,|\phi_j\rangle$．相应的矩阵是：

$$F^{(G)} = \left(F_{ij}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

F属于本征值$f_1 = 1$和$f_2 = 2$的本征函数分别为：

$$\psi_1^{(G)} = \begin{bmatrix} \langle\phi_1|\psi_1\rangle \\ \langle\phi_2|\psi_1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \psi_2^{(G)} = \begin{bmatrix} \langle\phi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\phi_2|\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 选择F表象，则Hilbert空间的正交归一基矢选择为$\{|\psi_i\rangle;\ i = 1, 2\}$. 力学量算符$\hat{F}$由实对角矩阵

  $$F^{(F)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  注意到$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$，我们看到$F$属于本征值$f_1 = 1$和$f_2 = 2$的本征函数分别为：

  $$\psi_1^{(F)} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\psi_1\rangle \\ \langle\psi_2|\psi_1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \psi_2^{(F)} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_2|\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  力学量算符$\hat{G}$对于F表象基矢的作用规则是：

  $$\begin{aligned} \hat{G}\,|\psi_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\phi_1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\phi_2\rangle \\ &= -\frac{1}{3}|\psi_1\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3}|\psi_2\rangle \\ \hat{G}\,|\psi_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\phi_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\phi_2\rangle \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}|\psi_1\rangle + \frac{1}{3}|\psi_2\rangle \end{aligned}$$

  所以，F表象中的力学量矩阵G的显示形式是：

  $$G^{(F)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

  G属于本征值$g_1 = 1$和$g_2 = -1$的本征函数分别是：

  $$\phi_1^{(F)} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\phi_1\rangle \\ \langle\psi_2|\phi_1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_2^{(F)} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\phi_2\rangle \\ \langle\psi_2|\phi_2\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 表象变换矩阵和其逆矩阵分别为：

  $$S = \begin{bmatrix} \langle\phi_1|\psi_1\rangle & \langle\phi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\phi_2|\psi_1\rangle & \langle\phi_2|\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

  $$S^{-1} = \begin{bmatrix} \langle\psi_1|\phi_1\rangle & \langle\psi_1|\phi_2\rangle \\ \langle\psi_2|\phi_1\rangle & \langle\psi_2|\phi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

  显然，$S^{-1} = S^\dagger$. 注意到

  $$\langle\psi_i|\Psi\rangle = \sum_j \langle\psi_i|\phi_j\rangle\,\langle\phi_j|\Psi\rangle \qquad \rightsquigarrow\ \ \Psi^{(F)} = S^{-1}\Psi^{(G)}$$

S是从F表象到G表象的表象变换矩阵，而S^{-1}则是从G表象到F表象的表象变换矩阵。

- 选择一个表象，例如G表象。力学量算符$\hat{F}$和$\hat{G}$在其中的矩阵表示已经分别由(12)式和(7)式给出。简单的计算给出：

$$FG = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$GF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

所以，

$$[F,\ G] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \end{bmatrix} = i\frac{2\sqrt{2}}{3}\sigma_2 \neq 0$$

鉴于F与G不对易，对这两个力学量进行测量一般不会同时有确定的测量值，除非$\langle\sigma_2\rangle_\Psi = 0$.

4. 考虑一个二能级体系，其哈密顿算符在某力学量表象中表达为

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \alpha \\ i\epsilon_0 & -\epsilon_0 \end{pmatrix}$$

式中约定ϵ_0和α是一些复常数且$\epsilon_0 > 0$. (a) 请问参数α如何取值(5分)？ (b) 请确定体系的能量本征值谱(5分). (c) 假设体系在$t = 0$时刻处在量子态

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

并自然演化到t时刻($t > 0$)，请确定量子态$|\psi(t)\rangle$(5分)以及体系分别坍塌到$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$与$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$的概率(10分).

解：

- 哈密顿算符H必须由厄米矩阵表示。所以参数α取值只能是：

$$\alpha = -i\epsilon_0$$

- 设H的本征值为E，其取值决定于代数方程

$$0 = \begin{vmatrix} \epsilon_0 - E & -i\epsilon_0 \\ i\epsilon_0 & -\epsilon_0 - E \end{vmatrix} = -\left(\epsilon_0^2 - E^2\right) - \epsilon_0^2 = E^2 - 2\epsilon_0^2$$

所以，体系的能量本征值谱是：

$$E_\pm = \pm\sqrt{2}\,\epsilon_0$$

H属于本征值$E_\pm$的本征矢量分别为：

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\left[i\,|1\rangle - (\sqrt{2}-1)\,|2\rangle\right]$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}-1)\,|1\rangle - i\,|2\rangle\right]$$

换言之，

$$
\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\Big[-i\,|\psi_+\rangle + (\sqrt{2}-1)\,|\psi_-\rangle\Big] \\
|2\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\Big[-(\sqrt{2}-1)\,|\psi_+\rangle + i\,|\psi_-\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

题设的体系初态可以按照能量本征态做如下展开：

$$
\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[i\,|1\rangle + 2\,|2\rangle\Big] \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{5}}\Big[(3-2\sqrt{2})\,|\psi_+\rangle + i(\sqrt{2}+1)\,|\psi_-\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

- 哈密段算符H不显含时间，故态矢量的时间演化算符是：

$$
\hat{U}(t) = \exp\left(-iHt/\hbar\right)
$$

体系自然演化到t时刻，其态矢量是：

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{5}}\Big[(3-2\sqrt{2})\hat{U}(t)\,|\psi_+\rangle + i(\sqrt{2}+1)\hat{U}(t)\,|\psi_-\rangle\Big] \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{5}}\Big[(3-2\sqrt{2})e^{-iE_+t/\hbar}\,|\psi_+\rangle + i(\sqrt{2}+1)e^{-iE_-t/\hbar}\,|\psi_-\rangle\Big] \\
&= i\,\frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\Big[(3-2\sqrt{2})e^{-iE_+t/\hbar} + e^{-iE_-t/\hbar}\Big]\,|1\rangle \\
&\quad + \frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\Big[(7-5\sqrt{2})e^{-iE_+t/\hbar} + (\sqrt{2}+1)e^{-iE_-t/\hbar}\Big]\,|2\rangle
\end{aligned}
$$

$|\psi(t)\rangle$坍塌到$|1\rangle$的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= \Big|\langle 1|\psi(t)\rangle\Big|^2 \\
&= \frac{3+2\sqrt{2}}{40}\Big|(3-2\sqrt{2})e^{-iE_+t/\hbar} + e^{-iE_-t/\hbar}\Big|^2 \\
&= \frac{1}{20}\Big[3+\cos\Big(2\sqrt{2}\,\epsilon_0 t/\hbar\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

而$|\psi(t)\rangle$坍塌到$|2\rangle$的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_2(t) &= \Big|\langle 2|\psi(t)\rangle\Big|^2 \\
&= \frac{3+2\sqrt{2}}{40}\Big|(7-5\sqrt{2})e^{-iE_+t/\hbar} + (\sqrt{2}+1)e^{-iE_-t/\hbar}\Big|^2 \\
&= \frac{1}{20}\Big[17-\cos\Big(2\sqrt{2}\,\epsilon_0 t/\hbar\Big)\Big]
\end{aligned}
$$