

量子力学A期终考试试题卷

姓名 学号 成绩 (Reference answer)

1. 考虑一维量子力学体系，设其哈密顿算符

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(\hat{x}) \quad (1)$$

仅存在离散的本征值谱(对应束缚态)，能量本征值方程表为 $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$.

(1). 计算矩阵元 $\langle n | [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{H}]] | n \rangle$;

(2). 利用(1)的结果验证海森堡量子化条件：

$$\sum_m (E_n - E_m) |\langle n | \hat{x} | m \rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \quad (2)$$

(3). 设 $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ ，计算矩阵元 $\langle n | \hat{x} | m \rangle$ 并通过计算(2)式左端的和式检验(2)的结果.

解：

(1). 注意到：

$$[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{1}{2\mu} [\hat{x}, \hat{p}^2] = \frac{i\hbar}{\mu} \hat{p}, \quad [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{H}]] = -\frac{\hbar^2}{\mu} \quad (3)$$

离散的能量本征值谱对应着束缚态，因此 $|n\rangle$ 可以正常归一化， $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$. 所以，

$$\langle n | [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{H}]] | n \rangle = -\frac{\hbar^2}{\mu} \langle n | n \rangle = -\frac{\hbar^2}{\mu} \quad (4)$$

本小题满分为5分，其中(3)式的两个对易关系分别得分2分和1分，直接写出(4)式仅得2分。

(2). 仅存在离散的能量本征值谱意味着束缚态是完备的， $\sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbb{I}$. 所以，

$$\begin{aligned}
 -\hbar^2/\mu &= \langle n | [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{H}]] | n \rangle = \langle n | \hat{x} [\hat{x}, \hat{H}] | n \rangle - \langle n | [\hat{x}, \hat{H}] \hat{x} | n \rangle \\
 &= \sum_m \langle n | \hat{x} | m \rangle \langle m | [\hat{x}, \hat{H}] | n \rangle - \sum_m \langle n | [\hat{x}, \hat{H}] | m \rangle \langle m | \hat{x} | n \rangle \\
 &= \sum_m \langle n | \hat{x} | m \rangle (E_n - E_m) \langle m | \hat{x} | n \rangle - \sum_m (E_m - E_n) \langle n | \hat{x} | m \rangle \langle m | \hat{x} | n \rangle \\
 &= 2 \sum_m (E_n - E_m) |\langle n | \hat{x} | m \rangle|^2
 \end{aligned} \tag{5}$$

亦即：

$$\sum_m (E_n - E_m) |\langle n | \hat{x} | m \rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \tag{6}$$

本小题满分为8分，其中单位算符使用错误(例如少了求和号)或者出现了别的数学表达错误(例如括号写在了错误的位置)，扣3分。伪证不得分。

(3). $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 对应简谐振子势场，

$$\hat{H} |n\rangle = (n + 1/2)\hbar\omega |n\rangle \quad \rightsquigarrow \quad E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \tag{7}$$

此情形下可以引入占有数算符的升降算符：

$$\hat{a} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu\omega\hbar}} - i\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}\hat{x}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu\omega\hbar}} + i\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}\hat{x} \tag{8}$$

使得 $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$. 从(8)式可知：

$$\hat{x} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{9}$$

所以，

$$\langle n | \hat{x} | m \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}(\sqrt{m}\delta_{m,n+1} - \sqrt{m+1}\delta_{m,n-1}) \tag{10}$$

换言之：

$$\left| \langle n | \hat{x} | m \rangle \right|^2 \Big|_{m \rightarrow n+1} = \frac{\hbar}{2\mu\omega} (n+1), \quad \left| \langle n | \hat{x} | m \rangle \right|^2 \Big|_{m \rightarrow n-1} = \frac{\hbar}{2\mu\omega} n \quad (11)$$

所以,

$$\sum_m (E_n - E_m) \left| \langle n | \hat{x} | m \rangle \right|^2 = -\hbar\omega \cdot \frac{\hbar}{2\mu\omega} (n+1) + \hbar\omega \cdot \frac{\hbar}{2\mu\omega} n = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \quad (12)$$

正如预期.

本小题满分为7分, 其中(7)(8)(9)(10)这四式相关的内容各自得1分(相关内容缺失则不得此分数, 不交叠扣分). (11)式的两个表达式各得1分, 直接写出(12)式仅得1分.

2. 一个质量为 μ 、电荷量为 q 的零自旋粒子在球对称静电场中运动, 其量子态在某规范中由波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 描写,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\nabla - \frac{i}{\hbar} \alpha^2 t \mathbf{r} \right)^2 \psi(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

式中 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ 为场点的位置矢径, α 为某携带量纲的常参数.

- (1). 能否找到一个新规范, 使得球对称静电场的矢量势 $\mathbf{A}' = 0$?
- (2). 设新规范中粒子的波函数为 $\psi'(\mathbf{r}, t)$. 请写出 $\psi'(\mathbf{r}, t)$ 服从的含时薛定谔方程.
- (3). 此带电粒子是否存在束缚定态? 若存在, 请给出基态下粒子的能量本征值.

解:

- (1). 若在某规范中电磁场的电磁势为 $(\mathbf{A}, \phi)$, 则描写质量为 μ 、电荷为 q 的零自旋带电粒子在此电磁场中运动的薛定谔方程在此规范中应表为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi \quad (14)$$

把(14)与题目所给的薛定谔方程比较, 知在此规范中 $\mathbf{A} = \frac{c}{q}\alpha^2 t \mathbf{r}$, $\phi = 0$. (14)式具有规范变换

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi(\mathbf{r},t)}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r},t), \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (15)$$

下的不变性. 倘若改取新规范使得 $\mathbf{A}' = 0$,

$$0 = \mathbf{A} + \nabla\chi = \frac{c}{q}\alpha^2 t \mathbf{r} + \nabla\chi \quad \rightsquigarrow \quad \chi(\mathbf{r},t) = -\frac{c}{2q}\alpha^2 r^2 t \quad (16)$$

新规范中电磁场的标量势是 $\phi' = \frac{1}{2q}\alpha^2 r^2$.

本小题满分为7分, 其中写出(14)和(15)两式的相关内容各得2分, 仅仅写出(16)式的内容只能得2分, 写出新规范中的电磁标势得1分.

(2). 新规范中的粒子波函数 $\psi'(\mathbf{r},t)$ 服从的含时薛定谔方程是:

$$i\hbar \frac{\partial\psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi' + \frac{1}{2}\alpha^2 r^2 \psi' \quad (17)$$

本小题满分为7分, 要求写出(17)式. 若出小错会酌情扣1分-3分.

(3). 很显然, (17)式是一个三维各向同性简谐振子的薛定谔方程, 自然存在束缚态. 约定 $\omega = |\alpha|/\sqrt{\mu}$, 此带电粒子基态的能量本征值是:

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{3\hbar|\alpha|}{2\sqrt{\mu}} \quad (18)$$

本小题满分为6分, 若出错至少扣3分.

3. 考虑由全同粒子构成的二粒子体系. 倘若两个质量为 μ 、动能为 $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ 的零自旋标量粒子沿 z 轴发生了对心弹性碰撞, 则碰撞后体系空间波函数满足的边界条件在质心系中应该是:

$$\psi(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikz} + e^{-ikz} + [f(\theta) + f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (19)$$

式中 $f(\theta)e^{ikr}/r$ 和 $f(\pi - \theta)e^{ikr}/r$ 分别描写碰撞后一个粒子从散射角 θ 方向出射、另一个粒子从散射角 $(\pi - \theta)$ 方向出射，此处已经计及了体系的动量守恒。体系的微分散射截面是：

$$\sigma(\theta) = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (20)$$

现在考虑两个质量为 μ 、动能为 $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ 、自旋为 $s = \frac{1}{2}$ 的旋量粒子沿 z 轴发生了对心弹性碰撞，

- (1). 倘若体系处在自旋三重态，请写出质心系中体系空间波函数的边界条件和微分散射截面。
- (2). 倘若体系处在自旋单态，请写出质心系中体系空间波函数的边界条件和微分散射截面。
- (3). 设 $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (2l+1) P_l(\cos \theta)$ ，请问当体系处在何种自旋态情形下，碰撞后粒子绝不会从 $\theta = 90^\circ$ 方向出射？

Hint:

勒让德多项式 $P_l(x)$ 的表达式是：

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l \quad (21)$$

它具有性质： $P_l(x) = (-1)^l P_l(-x)$ 。几个低阶勒让德多项式的显示表达式是： $P_0(x) = 1$ ， $P_1(x) = x$ ， $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ， $P_3(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 3x)$ 。

解：

- (1). 全同费米子体系的完整波函数关于任意两个粒子自由度的交换具有反对称性。所以，倘若二旋量粒子体系处在自旋三重态，其空间波函数必然关于二粒子的交换具有反对称性。质心系中体系空间波函数的边界条件应为：

$$\psi_{\text{triple}}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikz} - e^{-ikz} + [f(\theta) - f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (22)$$

微分散射截面：

$$\sigma(\theta) = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 \quad (23)$$

本小题满分为7分，其中提到全同费米子体系波函数关于粒子交换反对称性得1分，(22)和(23)式各得3分.

(2). 倘若二旋量粒子体系处在自旋单态，质心系中体系空间波函数的边界条件应为：

$$\psi_{\text{single}}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikz} + e^{-ikz} + [f(\theta) + f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (24)$$

微分散射截面是：

$$\sigma(\theta) = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (25)$$

本小题满分为7分，其中提到全同费米子体系波函数关于粒子交换反对称性得1分，(24)和(25)式各得3分.

(3). 注意到 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ，我们有：

$$\begin{aligned} f(\theta) \pm f(\pi - \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (2l + 1) [P_l(\cos \theta) \pm P_l(-\cos \theta)] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (2l + 1) [1 \pm (-1)^l] P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (26)$$

换言之，

$$\begin{aligned} f(\theta) + f(\pi - \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (4n + 1) P_{2n}(\cos \theta) \\ f(\theta) - f(\pi - \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} (4n + 3) P_{2n+1}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (27)$$

因为 $P_{2n+1}(0) = 0$ ，我们看到：

$$[f(\theta) - f(\pi - \theta)] \Big|_{\theta \rightarrow \pi/2} \rightarrow 0 \quad (28)$$

所以当二旋量粒子体系处在自旋3重态时，碰撞后粒子绝不会沿 $\theta = 90^\circ$ 方向飞出.

本小题满分为6分，若分析出小错酌情扣1分到2分，若结论出错则不得分。

4. 考虑由位置表象哈密顿算符

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \quad (29)$$

描写的一维量子力学粒子，约定其在初始时刻(即 $t \rightarrow -\infty$)所处的量子态是 $\hat{H}_0$ 的基态. 假设从 $t = 0$ 时刻起给振子施加微扰使得其哈密顿算符变为：

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\sqrt{\frac{\mu^3\omega^3}{\hbar^3}} x^3 e^{-t/\tau} \theta(t) \quad (30)$$

式中 τ 为已知的特征时间($\tau > 0$)， g 为无量纲耦合常数($0 < g \ll 1$)， $\theta(t)$ 是Heaviside阶梯函数. 请问当微扰持续足够长的时间后($t \rightarrow +\infty$)，粒子跃迁到 $\hat{H}_0$ 的各个本征态的概率是多少？请使用含时微扰论进行计算并精确到一级近似.

解：

精确到含时微扰论的一级近似，粒子从 $\hat{H}_0$ 的基态 $|0\rangle$ 跃迁到它的激发态 $|n\rangle$ 的概率是：

$$\begin{aligned} P_{0 \rightarrow n} &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dt \langle n | \hat{H}'(t) | 0 \rangle \exp[i(E_n - E_0)t/\hbar] \right|^2 \\ &= \frac{g^2 \mu^3 \omega^3}{\hbar^5} |\langle n | \hat{x}^3 | 0 \rangle|^2 \left| \int_0^\infty dt \exp \left[- \left(\frac{1}{\tau} - in\omega \right) t \right] \right|^2 \\ &= \frac{g^2 \mu^3 \omega^3}{\hbar^5} |\langle n | \hat{x}^3 | 0 \rangle|^2 \frac{\tau^2}{1 + n^2(\omega\tau)^2} \end{aligned}$$

注意到 $\hat{H}_0$ 可以改写为：

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left[-\frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu\omega}{\hbar} x^2 \right] \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega \left[\left(\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \frac{d}{dx} - \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x \right) \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \frac{d}{dx} - \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x \right) + 1 \right] \\
&= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

式中,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \frac{d}{dx} - \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \frac{d}{dx} - \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x \right) \quad (31)$$

不难证明 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, 且:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (32)$$

所以,

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{x}^3|0\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3|0\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|1\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|0\rangle + \sqrt{2}\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|2\rangle \right] \\
&= \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^{\frac{3}{2}} (3\delta_{n,1} + \sqrt{6}\delta_{n,3}) \quad (33)
\end{aligned}$$

从而,

$$\left| \langle n|\hat{x}^3|0\rangle \right|^2 = \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^3 (9\delta_{n,1} + 6\delta_{n,3}) \quad (34)$$

此式表明(在题设微扰作用下)谐振子只可能跃迁到 $\hat{H}_0$ 的本征态 $|1\rangle$ 或者 $|3\rangle$ 上. 相应的跃迁概率分别是:

$$P_{0 \rightarrow 1} = \frac{9g^2}{8\hbar^2} \frac{\tau^2}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (35)$$

$$P_{0 \rightarrow 3} = \frac{3g^2}{4\hbar^2} \frac{\tau^2}{1 + 9(\omega\tau)^2} \quad (36)$$

本题满分为20分，其中 $P_{0 \rightarrow n}$ 和 $|\langle n | \hat{x}^3 | 0 \rangle|^2$ 表达式的计算各得5分，计算过程出错酌情扣分。
(35)和(36)两式的结果各得5分，因子出错扣1-5分。

5. 考虑由哈密顿算符

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1 + \sigma_z}{4} \mu \omega^2 x^2 \quad (37)$$

描写的质量为 μ 、自旋为1/2的一维量子力学简谐振子，约定其在初始时刻(即 $t = 0$)所处的量子态是

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle] \quad (38)$$

式中 $|\pm\rangle$ 是泡利算符 σ_z 的本征矢量， $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$ 。

(1). 请问 $\psi(x, 0)$ 是不是该简谐振子的一个能量本征态？

(2). 请计算 $\psi(x, 0)$ 态下体系的能量平均值。

(3). 假设在无观测者介入的情况下体系自然地演化到时刻 $t(t > 0)$ 。此时观测者使用斯特恩-盖拉赫实验测量此简谐振子的自旋角动量。请问获得测量值 $s_z = -\hbar/2$ 的概率为多少？

Hint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{-b^2/4a}, \quad \text{Re}(a) \leq 0 \text{ but } a \neq 0 \quad (39)$$

解：

采取Pauli表象，

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

则 σ_z 属于本征值 ± 1 的本征矢量是：

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

体系的哈密顿算符可以表达为厄米矩阵：

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (42)$$

(1). $\hat{H}$ 本征值方程的解或者是：

$$\begin{aligned} \Psi_{1n}(x) &= \psi_n(x) \otimes |+\rangle = \begin{pmatrix} \psi_n(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \right) \psi_n(x) &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \psi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

或者是：

$$\begin{aligned} \Psi_{2p}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ipx/\hbar} \end{pmatrix} \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} &= \frac{p^2}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}, \quad -\infty < p < +\infty \end{aligned} \quad (44)$$

在方程(43)中， $\psi_n(x)$ 在 $n = 0$ 情形下的显示表达式为：

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) \quad (45)$$

所以， 题目给出的粒子初始波函数

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

不是粒子的能量本征态.

本小题满分为3分. 结论正确但无分析过程或者分析错误, 扣1分-2分. 结论错误不得分.

(2). 简单计算可知:

$$\hat{H}\psi(x, 0) = \frac{1}{2}\hbar\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) \left(1 - \frac{\mu\omega x^2}{\hbar} \right) \quad (47)$$

进而,

$$\psi^\dagger(x, 0)\hat{H}\psi(x, 0) = \frac{1}{4}\hbar\omega \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \exp(-\mu\omega x^2/\hbar) (2 - \mu\omega x^2/\hbar) \quad (48)$$

注意到 $\psi(x, 0)$ 是归一化的波函数, 此态下体系的能量平均值是:

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^\dagger(x, 0)\hat{H}\psi(x, 0) = \frac{3}{8}\hbar\omega \quad (49)$$

本小题满分为7分, 计算过程出错酌情扣分1分-3分. 结论错误不得分.

(3). 为了计算 $\psi(x, t)$, 需要先把 $\psi(x, 0)$ 按 $\hat{H}$ 的本征函数系展开. 设

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp C(p) e^{ipx/\hbar} \quad (50)$$

由此知:

$$\begin{aligned} C(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_0(x) e^{-ipx/\hbar} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) e^{-ipx/\hbar} \\ &= \frac{1}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) \end{aligned} \quad (51)$$

亦即:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4} \sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) e^{ipx/\hbar} \quad (52)$$

粒子的初始波函数(46)式可以重新表达为：

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\psi_0(x)}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4}\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) e^{ipx/\hbar} \right) \quad (53)$$

由此知对于任意的非负整数 n ，我们有：

$$\hat{H}^n \psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\hbar\omega/2)^n \psi_0(x)}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4}\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp (p^2/2\mu)^n \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) e^{ipx/\hbar} \right) \quad (54)$$

因此， $t(> 0)$ 时刻粒子的波函数应该是：

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \psi(x, 0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-it/\hbar)^n}{n!} \hat{H}^n \psi(x, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-it/\hbar)^n}{n!} \left(\frac{(\hbar\omega/2)^n \psi_0(x)}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4}\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp (p^2/2\mu)^n \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) e^{ipx/\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-i\omega t/2} \psi_0(x)}{(\pi\hbar\mu\omega)^{1/4}\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-i\frac{p^2 t}{2\mu\hbar}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\mu\omega}\right) e^{ipx/\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) e^{-i\omega t/2} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2(1+i\omega t)}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar(1+i\omega t)}\right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

在 $\psi(x, t)$ 态下测量粒子自旋角动量获得测量值 $s_z = -\hbar/2$ 的概率是：

$$\begin{aligned}
P_{\downarrow} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \frac{1}{\sqrt{2(1+i\omega t)}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar(1+i\omega t)} \right] \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+(\omega t)^2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar(1+i\omega t)} - \frac{\mu\omega x^2}{2\hbar(1-i\omega t)} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\omega^2 t^2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[-\frac{\mu\omega x^2}{\hbar(1+\omega^2 t^2)} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\omega^2 t^2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{\mu\omega}} (1+\omega^2 t^2) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{56}$$

附加说明：

也可以通过另一种方法计算 $P_{\downarrow}$. 按照(55)式, 在 $\psi(x, t)$ 态下测量粒子自旋角动量获得测量值 $s_z = \hbar/2$ 的概率是:

$$\begin{aligned}
P_{\uparrow} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp(-\mu\omega x^2/2\hbar) e^{-i\omega t/2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\mu\omega x^2/\hbar) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{57}$$

所以, 在 $\psi(x, t)$ 态下测量粒子自旋角动量获得测量值 $s_z = -\hbar/2$ 的概率是:

$$P_{\downarrow} = 1 - P_{\uparrow} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{58}$$

本小题满分为10分, 其中求出 $\psi(x, t)$ 的表达式(55)得5分, 直接写出 $P_{\downarrow} = \frac{1}{2}$ 而没有可靠的计算步骤只能得2分.