中 国 科 学 技 术 大 学

2024 年秋季学期终考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　得分: ________

姓名: ________　　学号: ________

2025 年 1 月 12 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选五题. 每题均为 20 分.

问题 1 设量子系统的 Hamilton 量为 H. H 与时间无关. 在 $t=0$ 的初始时刻, 系统处于状态 $|\psi\rangle$. 经过一段很短的时间 δt 之后, 发现系统仍然处于初态 $|\psi\rangle$ 的概率记作 $p(\delta t)$. 证明

$$p(\delta t) = 1 - (\Delta H)^2(\delta t)^2/\hbar^2 + \mathcal{O}\big((\delta t)^4\big),$$

其中 ΔH 是 Hamilton 量的标准方差, 即 $(\Delta H)^2 = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2$, 这里的期望值是在初态 $|\psi\rangle$ 上计算的.

一般地, 初态 $|\psi\rangle$ 未必是 H 的本征态, 我们可以把它制备成某个观测量 A 的一个本征态. 概率 $p(\delta t)$ 来自于 δt 时刻对 A 的测量.

问题 2 设一维谐振子的初态为

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

其中 $|0\rangle$ 是谐振子的基态, $|1\rangle$ 是第一激发态. 令 $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, 其中 $|\psi(t)\rangle$ 是 t 时刻谐振子的量子态.

(1) 在时刻 τ, 有 $\rho(\tau) = \rho(0)$, 求 τ 的最小值.

(2) 计算从 0 时刻到 τ 时刻演化过程中的几何相.

问题 3 一维运动的粒子处于

$$|\psi\rangle = |\varphi_0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} U(a)\,|\varphi_0\rangle\,,$$

注意 $|\psi\rangle$ 未归一, 其中 $U(a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aP/\hbar}$ 是空间平移算子, $|\varphi_0\rangle$ 在位置表象中的波函数是

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\delta^2)^{1/4}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4\delta^2} \right\}.$$

(1) 在什么条件下可以认为 $\langle\varphi_0|U(a)|\varphi_0\rangle$ 近似为零?

在以下问题中假设 $\langle\varphi_0|U(a)|\varphi_0\rangle$ 可以忽略.

(2) 给出与量子态 $|\psi\rangle$ 对应的概率密度 $|\psi(x)|^2$. 我们能否通过测量粒子的位置来确定 $|\psi\rangle$ 中的相位 γ?

(3) 求出动量表象中粒子的概率密度.

(4) 设另有一个混合系综, 其中 $|\varphi_0\rangle$ 和 $U(a)\,|\varphi_0\rangle$ 的概率均为 1/2, 即

$$\rho = \left\{ |\varphi_0\rangle\,, p_1 = \tfrac{1}{2};\ U(a)\,|\varphi_0\rangle\,, p_2 = \tfrac{1}{2} \right\},$$

如何通过测量区分纯态 $|\psi\rangle$ 和混合态 ρ?

问题 4 粒子在三维空间中运动, 它的波函数设为

$$\psi(\mathbf{r}) = xyf(r),$$

其中 $f(r)$ 是径向距离 r 的函数, 与角度无关.

(1) $\psi(\mathbf{r})$ 是轨道角动量 L_x, L_y 或 L_z 的本征函数吗?

(2) $\psi(\mathbf{r})$ 是 L^2 的本征态吗? 如果是的, 那么相应的轨道量子数 l 等于多少?

(3) 令 $U(\phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi L_z/\hbar}$, 计算 $U(\phi)$ 对波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 的变换结果.

问题 5 自旋 1/2 粒子质量为 m, 带电量为 q, 置于匀强磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 中. 粒子的自旋磁矩为

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{gq}{2m}\mathbf{S},$$

其中 g 为 g-因子.

(1) 定义螺旋度算子 (helicity operator) $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}$. 证明, 当 $g = 2$ 时, 螺旋度算子是守恒量.

(2) 假设 $g \neq 2$. $t = 0$ 时刻粒子进入磁场, 此时速度 $\mathbf{V}$ 的方向与磁场方向垂直, 自旋角动量 $\mathbf{S}$ 的方向与速度 $\mathbf{V}$ 的方向一致. 计算 t 时刻粒子的自旋方向与速度方向的夹角.

问题 6 考虑两维谐振子, 用升降算子表示它的 Hamilton 量:

$$H_0 = \hbar\omega\left(\mathfrak{a}_1^\dagger \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2^\dagger \mathfrak{a}_2\right),$$

其中

$$\left[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j\right] = 0, \quad \left[\mathfrak{a}_i^\dagger, \mathfrak{a}_j^\dagger\right] = 0, \quad \left[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j^\dagger\right] = \delta_{i,j}\mathbb{1}.$$

另有微扰项

$$H' = \lambda\left(\mathfrak{a}_1^\dagger \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2^\dagger \mathfrak{a}_1\right)$$

(1) 求解两维谐振子第二激发态能级的一阶修正.

(2) 给出 Hamilton 量 $H = H_0 + H'$ 能级的严格解.