# 中国科学技术大学物理学院

## 2022-2023 学年第 二 学期

## 理论力学 A 试卷（A 卷）

院（系）________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

| 试卷卷面成绩 | | | | | | 卷面成绩占% | 平时成绩占% | 课程考核成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 小计 | | | |
| 得分 | | | | | | | | |

**温馨提示：**

¶ 本次考试为"闭卷"；

¶ 请务必在"试卷"上写上姓名和学号；

¶ 请务必在"答题纸"的右上角写上姓名和学号；

¶ 请在每一张"演算纸"的右上角写上姓名，和试卷、答题纸放在一起一并上交；

¶ 如遇到试卷中可能存在的歧义或理解不了之处，请随时举手询问.



| 得分 |
|---|
| |

**一、单项选择题**（共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

1. 下面关于一个力学系统广义坐标的说法**正确**的是　（　）

(A) 广义坐标一定不是惯性坐标；
(B) 广义坐标的选取具有很大的任意性，但量纲必须是长度量纲；
(C) 系统"独立广义坐标"的个数一般来说不是系统的自由度数；
(D) 系统广义坐标的"独立虚位移"的个数一定小于"系统独立广义坐标"的个数.

2. 关于一个力学系统的约束，下面说法**不正确**的是　（　）

(A) 一般来说，约束是对系统（扩展）态空间上的点进行的限制；
(B) 完整约束系统的约束实质上对系统（扩展）位形空间上的点进行限制；
(C) 线性微分约束一定是可积约束；
(D) 非线性微分约束可能是完整约束.

3. 对于完整约束系统，下面关于虚功原理表述**不正确**的是　（　）

(A) 对于定常完整约束系统，虚位移与约束面垂直；
(B) 对于定常完整约束系统，虚位移与约束面相切；
(C) 对于理想约束系统，约束力做的总虚功为零；
(D) 对于理想约束系统，主动力所做的总虚功为零.

4. 关于拉氏量的表述**不正确**的是　（　）

(A) 拉氏量的数值不依赖于广义坐标的选取；
(B) 拉氏量可能会依赖于广义坐标关于时间的高阶（超过 2 阶）导数；
(C) 一个力学系统的拉氏量是唯一的；
(D) 一个力学系统的运动方程只有在满足一定条件的情况下才是某个拉氏量的欧拉-拉格朗日方程.

5. 下面说法**不正确**的是　（　）

(A) 相互作用为保守力的两体系统总是在一个平面内运动；
(B) 对于保守中心力场中的质点，质点径矢 $\boldsymbol{r}$ 单位时间内扫过的面积是一个常数；
(C) 开普勒第二定律只适用于反平方律的中心力场问题；
(D) 即使存在微扰的情况下，仍能够给出闭合轨道的中心力只能是平方反比律和胡克律.

6. 下面说法**正确**的是　（　）

(A) 开普勒第一定律适用于所有类型的中心力场；
(B) 开普勒第三定律适用于所有类型的中心力场；
(C) 开普勒问题中角动量不为零的质点的轨道是圆锥曲线；

(D) 开普勒问题中能量为零的质点的轨道一定是抛物线.

7. 在牛顿力学中，下面说法正确的是 ( )

(A) 连续分布物质系统的自由度一定是无限多个，第一积分也是无限多个;
(B) 一个力学系统的所有坐标和速度都可以表示成第一积分和时间的初等函数;
(C) 两体问题是完全可以求解的;
(D) 三体问题或三体以上的问题不存在解析解.

8. 下面说法正确的是 ( )

(A) 若完整的保守系统的某个平衡位置势能取严格极小，则该平衡位置是稳定平衡位置;
(B) 若完整的保守系统稳定平衡，则其必然处于势能的极小点;
(C) 势能极小点"和"稳定平衡点"是一回事;
(D) 无论在什么情况下，稳定平衡位置都不是势能极小点.

9. 对小振动系统，下面说法正确的是 ( )

(A) 简正坐标一定具有长度量纲;
(B) 利用简正坐标，可以将小振动系统看成是很多简谐振子的集合;
(C) 简正坐标只适用于自由振动系统;
(D) 简正坐标不能用于受迫振动.

10. 对于非线性振动，下面说法不正确的是 ( )

(A) 会出现"倍频"现象;
(B) 系统的基频或本征频率可以和振幅有关;
(C) 受迫振动时的共振频率必然是系统的基频或本征频率;
(D) 可能会出现振幅突然增大或突然减小的情况.

11. 关于哈密顿量下面说法不正确的是 ( )

(A) 哈密顿量具有能量的量纲;
(B) 哈密顿量不一定是由某个拉氏量的勒让德变换得来;
(C) 当哈密顿量守恒量时，它就是系统的能量;
(D) 在不同的广义坐标下，哈密顿量数值可能会变化.

12. 关于正则变换下面说法不正确的是 ( )

(A) 广义坐标变换是一种特殊的正则变换;
(B) 哈密顿方程组的形式保持不变;
(C) 相空间的体积元在正则变换下是不变的;
(D) 基本泊松括号在正则变换下可能会变化.



| 得分 |
| --- |
| |

## 二、多项选择题 (共 8 题, 每题 2 分, 共 16 分)

1. 关于函数 $f$ 的勒让德变换，下面说法正确的是 ( )

(A) 函数 $f$ 必须是二阶可微的;
(B) 若函数 $f$ 是凸的，则其存在勒让德变换;
(C) $f$ 的勒让德变换 $g$ 也是一个凸函数;
(D) 凸函数 $f$ 的连续两次勒让德变换就是 $f$ 自身.

2. 关于泊松括号下面说法正确的是 ( )

(A) 泊松括号的定义不依赖于正则坐标的选取;
(B) 任意两个力学量的泊松括号在正则变换下是不变的;
(C) 两个运动积分的泊松括号也是运动积分，这就是泊松-雅可比定理;
(D) 用泊松括号描述运动方程时，哈密顿量要和选取的正则坐标匹配.

3. 关于正则变换的生成函数 (母函数)，下面说法正确的是 ( )

(A) 一般来说生成函数是新变量、老变量、和时间的函数;
(B) 并不是所有的生成函数都能生成恒等变换;
(C) 共有四种基本生成函数，且他们之间可以通过勒让德变换相联系;
(D) 对于多自由度系统的正则变换，不同自由度对应的生成函数的类型可以不一样.

4. 下面说法正确的是 ( )

(A) 哈密顿量生成了相空间中参数为时间 $t$ 的单参数正则变换;
(B) 通过哈密顿量生成的正则变换的主动形式，可以得到系统过相空间某个给定点的轨道;
(C) 可以通过正则变换使得系统的正则坐标全部是不随时间变化的常数 (运动积分);
(D) 给定初值后，一个力学量关于时间的依赖关系可以通过计算该力学量和系统的哈密顿量的泊松括号得到.

5. 关于哈密顿-雅可比方程，下面说法正确的是 ( )

(A) 一般来说，对于 $n$ 个自由度系统，哈密顿-雅可比方程是一个具有 $(n+1)$ 个自变量，待求变量为哈密顿主函数 $S(q,t)$ 的的一阶非线性偏微分方程;
(B) 如果知道了系统的哈密顿量 $H(q,p,t)$, 只需将 $p=\partial S/\partial t$ 带入 $H+\partial S/\partial t=0$ 便可以得到系统的哈密顿-雅可比方程;
(C) 求得哈密顿-雅可比方程的全积分后，通过求解转换方程便可得到系统的解，且求解哈密顿-雅可比方程等价于求解系统的正则方程.

(D) 哈密顿-雅可比方程的全积分可以看成"化零正则变换"的生成函数，而且是第二类生成函数.

6. 关于刚体的运动，下面说法正确的是 ( )

(A) 刚体定点运动的任意位移都可以通过围绕经过该定点的某个轴的一次转动实现;

(B) 刚体最为一般的位移是一个平移和转动的复合，且当基点改变时，刚体平动的方向和平动的大小都会改变，但刚体转动的转动轴和转动角度不依赖于基点的选取;

(C) 刚体的角速度不依赖于基点的选取;

(D) 刚体上任意一点的速度和刚体角速度的内积不依赖于基点的选取.

7. 下面说法正确的是 ( )

(A) 刚体的惯性张量不依赖于基点的选取;

(B) 刚体的主惯性矩在正交变换下不变;

(C) 刚体沿着某个轴 $\boldsymbol{n}$ 的惯性矩 $I_n$ 在正交变换下不变;

(D) 若刚体上的点聚集在 $\boldsymbol{n}$ 轴附近，并沿着 $\boldsymbol{n}$ 轴延展，则绕着该轴的惯性矩 $I_n$ 较小.

8. 下面说法正确的是 ( )

(A) 合外力矩为零的刚体，其角动量和能量守恒;

(B) 刚体的角动量不一定正比于刚体的角速度;

(C) 在本体坐标系中，轴对称刚体的角速度矢量可能会绕着对称轴转动，这就是所谓的进动;

(D) 轴对称刚体沿着对称轴方向的主惯性矩 $I_3$ 和另外两个大小相同的主惯性矩 $I_1 = I_2$ 决定了进动频率 $\Omega$，且有 $\Omega = (|I_3 - I_1|/I_1)\omega_3$，其中 $\omega_3$ 是角速度矢量 $\omega$ 在对称轴方向的分量.

| 得分 |
|---|
| |

## 三、问答题 (共 2 题, 每题 5 分, 共 10 分)

1. 简述拉格朗日-达朗贝尔原理与哈密顿原理.

2. 简述诺特定理与其意义.



| 得分 |
|---|
| |

## 四、公共题 (共 3 题，第 1 题 10 分，第 2 题和第 3 题分别 20 分，共 50 分)

1. 一个单自由度的拉格朗日量为

$$L = \dot{q}^2 \sin^2 t + \dot{q}q \sin 2t + q^2 ,$$

其中 $\dot{q}$ 表示对 $q$ 求时间 $t$ 的导数.

(i). 求与 $q$ 共轭的广义动量以及相应的哈密顿量 $H(q,p)$;

(ii). 求一正则变换 $(q,p) \to (Q,P)$, 使得变换后的哈密顿量不显含时间; (提示: 先从拉格朗日量的角度化解问题).

2. 某系统的哈密顿函数为:

$$H = (p_1)^2 + (kp_2 - q_1)^2 ,$$

其中 $k$ 是不为零的常数.

(i). 写出该系统的哈密顿-雅可比方程;

(ii). 求此方程的一个解 (以积分表达式表示即可);

(iii). 利用上一问的结果，解出系统的运动轨道方程.

3. 一颗半径为 $R$、质量为 $M$ 的匀质实心球状行星以角速度 $\vec{\omega}_0$ 旋转. 突然, 一颗质量为 $\alpha M$ 的小行星撞上并粘在行星 $M$ 上, 撞击点和球心的连线与 $\vec{\omega}_0$ 的夹角为 $\theta$, 如图 1所示. 已知碰撞刚结束时组合体的角速度仍为 $\vec{\omega}_0$.

(i). 计算组合体相对于其质心的惯量张量 ($x_3$ 轴从质心指向撞击点);

(ii). 由于组合体的质量分布不再是球对称的, 其旋转轴将发生进动. 转轴进动的周期是多少"天"? 这里"一天"定义为 $2\pi/\omega_0$, 其中 $\omega_0$ 是 $\vec{\omega}_0$ 的大小.

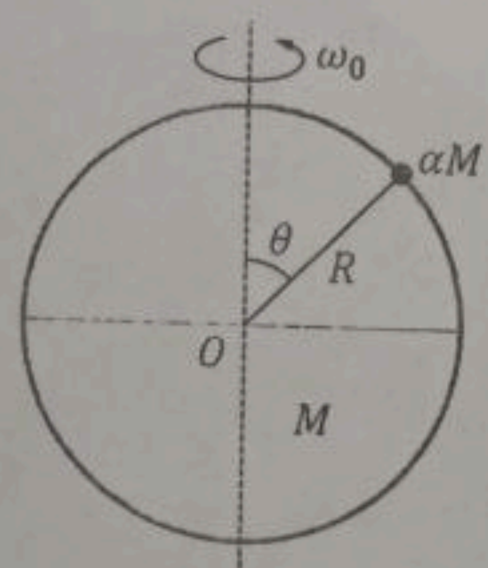


图 1: 公共题第 3 题示意图.



附录 (可能用到的定义或公式)

(i). 四种基本的生成函数和转换方程:

| 生成函数 $F$ | 转换方程 |
|---|---|
| $F_1(q,Q,t)$ | $p_\alpha=\partial F_1/\partial q^\alpha,P_\alpha=-\partial F_1/\partial Q^\alpha$ |
| $F_2(q,P,t)-\sum_\alpha P_\alpha Q^\alpha$ | $p_\alpha=\partial F_2/\partial q^\alpha,Q^\alpha=\partial F_2/\partial P_\alpha$ |
| $F_3(p,Q,t)+\sum_\alpha p_\alpha q^\alpha$ | $q^\alpha=-\partial F_3/\partial p_\alpha,P_\alpha=-\partial F_3/\partial Q^\alpha$ |
| $F_4(p,P,t)+\sum_\alpha p_\alpha q^\alpha-\sum_\alpha P_\alpha Q^\alpha$ | $q^\alpha=-\partial F_4/\partial p_\alpha,Q^\alpha=\partial F_4/\partial P_\alpha$ |

(ii). 惯性张量:

对于离散的质点系统, 在笛卡尔坐标系 $\{x^\alpha,\alpha=1,2,3\}$ 中, 其转动惯性张量为

$$I_{\alpha\beta}=\sum_i m_i\left[r_i^2\delta_{\alpha\beta}-(\boldsymbol{r}_i)_\alpha(\boldsymbol{r}_i)_\beta\right]. \tag{1}$$

这里 $m_i$ 是第 $i$ 个质点的质量, $\boldsymbol{r}_i$ 代表第 $i$ 个质点在惯性系中的位置矢量, $(\boldsymbol{r}_i)_\alpha$ 是其分量, 而 $r_i$ 是其模长. 而对于连续分布的物质系统, 其转动惯性张量为

$$I_{\alpha\beta}=\int_V \rho(\boldsymbol{r})(r^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta)dv, \tag{2}$$

其中 $\rho=\rho(\boldsymbol{r})$ 是物质分布的密度, $\boldsymbol{r}$ 是位置矢量, 而

$$x_\alpha=\sum_\beta\delta_{\alpha\beta}x^\beta,\qquad r^2=\sum_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=\sum_\alpha x_\alpha x^\alpha.$$

这里 $\alpha$ 和 $\beta$ 的取值为 $1,2,3$.

(iii). 无外力矩的欧拉动力学方程

$$\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1&=\omega_2\omega_3(I_2-I_3),\\ I_2\dot{\omega}_2&=\omega_3\omega_1(I_3-I_1),\\ I_3\dot{\omega}_3&=\omega_1\omega_2(I_1-I_2),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $I_1$, $I_2$, $I_3$ 是主惯性矩.

(iv). 不显含时间系统的哈密顿量守恒, 即 $H(p,q)=E$, 其中 $E$ 为常数. 这时候, 系统哈密顿主函数 $S(q,t)$ 可以分解为

$$S(q,t)=W(q)-Et,$$

其中 $W$ 是哈密顿特征函数, 且满足哈密顿-雅可比方程

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E.$$