

中国科学技术大学

2022~2023 学年第二学期考试试卷

☒A 卷 ☐B 卷

课程名称: 现代原子与分子物理导论 课程代码: PHYS5101P.01

开课院系: 物理学院 考试形式: 半开卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
满 分	15	14	13	14	14	12	18	100
得 分								

注: 共七道大题, 请勿漏答。请在首页写上姓名和学号, 并在每道题下方空白处答题, 答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸。在考试过程中, 不允许使用计算器或手机等任何电子产品。

玻尔磁矩 $\mu_B = h \times 14 \text{ GHz/T}$, h 是普朗克常数

投影定理 $\langle m' | \mathbf{V} | m \rangle = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}}{J(J+1)} \langle m' | \mathbf{J} | m \rangle$

类氢原子 ns 态波函数在原子核处分布 $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{na_0} \right)^{3/2}$, a_0 为玻尔半径。

超精细结构 A、B 系数: $E = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + B \frac{3(\mathbf{I} \cdot \mathbf{J})^2 + \frac{3}{2}(\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}) - I(I+1)J(J+1)}{2I(2I-1)J(2J-1)}$

当 $L=0$ 时, $A = \frac{4\mu_0}{3\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{Z}{na_0} \right)^3$

当 $L \neq 0$ 时, $A = \frac{\mu_0}{2\pi} \mu_B g_I \mu_N \frac{1}{J(J+1)} \frac{1}{L+1/2} \left(\frac{Z}{na_0} \right)^3$

Breit-Rabi 公式 (忽略核磁矩): $E_{F=I \pm 1/2} = -\frac{\Delta E_{hfs}}{2(2I+1)} \pm \frac{\Delta E_{hfs}}{2} \left(1 + \frac{4mx}{2I+1} + x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 这

里, $x = \frac{g_I \mu_B B}{\Delta E_{hfs}}$, ΔE_{hfs} 是超精细分裂能量

Rb 原子参数:

^{87}Rb 核自旋

$I=3/2$

^{87}Rb 基态超精细分裂频率

$\Delta E/h = 6.8 \text{ GHz}$

Notation:	J	J	...
	M	M	...
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$		

[illegible]

图 1 CG 系数表

1. (15 分) 考虑氢原子, 根据首页给出的表达式和波函数形式, 用 μ_B 、 μ_0 、 μ_N 、 g_I 和 a_0 等参数表示 $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ 和 $2P_{3/2}$ 的超精细分裂能级差, 以及四个超精细能级分裂的比值。

超精细分裂为 $E = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} A [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$ (2 分)

对 nS 态, $A_{nL,J} = \frac{4\mu_0}{3\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{1}{na_0}\right)^3$, 对 nP 态, $A_{nL,J} = \frac{\mu_0}{3\pi} \mu_B g_I \mu_N \frac{1}{J(J+1)} \left(\frac{1}{na_0}\right)^3$

对 $1S_{1/2}$, $\Delta E = A_{10,1/2} = \frac{4\mu_0}{3\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{1}{a_0}\right)^3$ (3 分)

对 $2S_{1/2}$, $\Delta E = A_{20,1/2} = \frac{\mu_0}{6\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{1}{a_0}\right)^3$ (3 分)

对 $2P_{1/2}$, $\Delta E = A_{21,1/2} = \frac{\mu_0}{18\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{1}{a_0}\right)^3$ (3 分)

对 $2P_{3/2}$, $\Delta E = 2A_{21,3/2} = \frac{\mu_0}{45\pi} \mu_B g_I \mu_N \left(\frac{1}{a_0}\right)^3$ (3 分)

所以, 四个能级的超精细分裂的比值为: 120:15:5:2 (1 分)

2. 考虑 ^{87}Rb 原子，核磁矩的大小可以忽略。

(a) (6 分) 计算 $|5P_{3/2}, F=2\rangle$ 的 g 因子。

(b) (8 分) 在外磁场为 B 时， $5S_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 到 $5S_{1/2} |F=2, m_F=0\rangle$ 的跃迁能量 ΔE 。当 $B=10^{-4}\text{T}$ 时，请将 ΔE 中二阶塞曼效应（跃迁能量中与磁场大小成平方关系的部分）写成 $h\delta f$ 的形式，并给出 δf 的数值结果（结果误差需要在 10% 以内）。

$$(a) \quad H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = g_F \mu_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{B} = (g_J \mu_B \mathbf{J} - g_I \mu_N \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B}$$

在忽略核磁矩的情况下，由投影定理得：

$$g_F = \frac{J \cdot F}{F(F+1)} g_J = \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} g_J = \frac{g_J}{2} \quad (2 \text{ 分})$$

进一步由投影定理得：

$$g_J = \frac{L \cdot J}{J(J+1)} g_L + \frac{S \cdot J}{J(J+1)} g_S = \frac{4}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

综合得， $g_F = 2/3$ (2 分)

(b) 根据 Breit-Rabi 公式：

$$E_{F=2, m_F=0} = -\frac{\Delta E_{hfs}}{2(2I+1)} + \frac{\Delta E_{hfs}}{2} \left(1 + \left(\frac{g_J \mu_B B}{\Delta E_{hfs}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{F=1, m_F=0} = -\frac{\Delta E_{hfs}}{2(2I+1)} - \frac{\Delta E_{hfs}}{2} \left(1 + \left(\frac{g_J \mu_B B}{\Delta E_{hfs}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

对基态，有 $g_J = g_S = 2$ (2 分)

$$\text{综合得：} \Delta E = \Delta E_{hfs} \left(1 + \left(\frac{g_J \mu_B B}{\Delta E_{hfs}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \Delta E_{hfs} + \frac{2(\mu_B B)^2}{\Delta E_{hfs}} \quad (2 \text{ 分})$$

所以二阶塞曼效应为： $h\delta f = \frac{2(\mu_B B)^2}{\Delta E_{hfs}}$ (2 分)

这样有， $\delta f = \frac{2(\mu_B B)^2}{h\Delta E_{hfs}} = 576 \text{ Hz}$ (2 分)

3. (15 分) 考虑一类氢原子核模型为电荷均匀分布、半径为 R 的球体，设改原子核的总电荷为 Ze ，无穷远处的电势为零，求

(a) (6 分) 该原子核电势的径向分布函数 $V(r)$ 。

(b) (7 分) 使用一阶微扰理论和首页给出的波函数形式，计算该非点电荷的原子核引起的 nS 态原子能级的变化。

(a) 类比于引力，半径为 R 的电荷 Ze 对距离为 r 的电子的库伦作用力为：

$$F = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R$$

$$F = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{R}\right)^3 = -\frac{Ze^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad r \leq R \quad (2 \text{ 分})$$

对上式积分得到：

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r > R \quad (2 \text{ 分})$$

$$V(r) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right) \quad r \leq R \quad (2 \text{ 分})$$

(b) 相对于核的点电荷模型，由非点状结构的核模型引入的哈密顿量的修正为：

$$H' = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 + \frac{2R}{r}\right) \quad r \leq R$$

$$H' = 0 \quad r > R \quad (3 \text{ 分})$$

由此得到的对 nS 态的能量修正为

$$\Delta E = \langle nS | H' | nS \rangle = 4\pi \int_0^R |\psi_{nS}(0)|^2 H' r^2 dr \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 4 \left(\frac{Z}{na_0}\right)^3 \int_0^R \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 + \frac{2R}{r}\right) r^2 dr = \frac{Z^4 e^2}{10\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{n^3 a_0^3} \quad (2 \text{ 分})$$

4. 分析原子光谱中的多普勒展宽及其抑制机制。

(a) (4 分) 请解释原子光谱中多普勒展宽产生的机制;

(b) (4 分) 光谱的功率展宽和多普勒展宽分别单独呈什么线型?

(b) (6 分) 请简要解释饱和吸收光谱抑制多普勒展宽的原理。

(a) 光谱中的多普勒展宽是由于运动的原子会产生多普勒频移 (2 分), 而原子速度又呈现麦克斯韦分布 (2 分), 所以原子共振线的多普勒频移也呈现出与速度相关的分布, 这个分布就是多普勒展宽的来源。

(b) 光谱的功率展宽呈洛伦兹线型 (2 分), 而多普勒展宽呈高斯线型 (2 分)。

(c) 饱和吸收光谱中, 波长相同的一束强光与一束弱光相向传播。(2 分)

对速度不为零的原子来说, 其感受到的强光与弱光的多普勒频移相反, 不会同时发生共振吸收的情况。当激光频率扫描时, 弱光的透射呈现多普勒展宽的背景信号。(1 分)

而速度趋于零的那一部分原子, 它的多普勒效应相对于自然展宽可以忽略, 这样它们可以同时共振地与两束光相互作用。在强光作用下, 与该光共振的速度为零的原子的跃迁趋于饱和, 而弱光的透射会增强。这样, 在饱和吸收光谱中, 原子光谱在多普勒展宽的背景上会在共振位置附近出现一个受限于功率展宽的窄峰。

(3 分)

5. (a) (4 分) 解释什么是原子能级跃迁中的偶极近似, 并给出其成立的条件?

(b) (6 分) 在电偶极跃迁条件下, ^{87}Rb $|5S_{1/2} F=1, m_F=1\rangle$ 可以跃迁到 $5P_{3/2}$ 上的哪些态?

(c) (4 分) 在 ^{87}Rb 磁光阱中, 请解释冷却光的波长应该如何选择?

(a) 偶极近似就是在跃迁波长远大于原子等效尺寸 (波尔半径) 的情况下, 将跃迁矩阵元中的 e^{ikr} 近似为 1。 (成立条件 2 分, 近似结果 2 分)

(b) 在电偶极跃迁条件下, $|5S_{1/2} F=1, m_F=1\rangle$ 可以跃迁到: $|5P_{3/2} F=0, m_F=0\rangle$, $|5P_{3/2} F=1, m_F=0\rangle$, $|5P_{3/2} F=1, m_F=1\rangle$, $|5P_{3/2} F=2, m_F=0\rangle$, $|5P_{3/2} F=2, m_F=1\rangle$, $|5P_{3/2} F=2, m_F=2\rangle$ (写对一个态给 1 分, 写错一个扣 1 分)

(c) 磁光阱中, 激光波长应该选在 $|5S_{1/2} F=2, m_F=\pm 2\rangle$ 到 $|5S_{1/2} F=3, m_F=\pm 3\rangle$ 跃迁波长的红失谐位置 (跃迁的 m_F 写成单一正号或负号都可以, 跃迁写对给 2 分, 红失谐写对给 2 分)。

6. (12 分) 计算 ^{87}Rb $|5P_{3/2} F=1, m_F=1\rangle$ 自发辐射到 $|5S_{1/2} F=1, m_F=0\rangle$ 与 $|5S_{1/2} F=1, m_F=1\rangle$ 的几率比值。

根据 CG 系数表, 有:

$$|5P_{3/2} F=1, m_F=1\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}} |J=3/2, m_J=3/2, l=3/2, m_l=-1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |J=3/2, m_J=1/2, l=3/2, m_l=1/2\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}} |J=3/2, m_J=-1/2, l=3/2, m_l=3/2\rangle \quad (2 \text{ 分})$$

$$|5S_{1/2} F=1, m_F=0\rangle = -\sqrt{\frac{1}{2}} |J=1/2, m_J=1/2, l=3/2, m_l=-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |J=1/2, m_J=-1/2, l=3/2, m_l=1/2\rangle \quad (2 \text{ 分})$$

$$|5S_{1/2} F=1, m_F=1\rangle = -\frac{1}{2} |J=1/2, m_J=1/2, l=3/2, m_l=1/2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |J=1/2, m_J=-1/2, l=3/2, m_l=3/2\rangle \quad (2 \text{ 分})$$

$|5P_{3/2} F=1, m_F=1\rangle$ 到 $|5S_{1/2} F=1, m_F=0\rangle$ 的跃迁为 σ -跃迁, 跃迁矩阵元为:

$$\langle 5S_{1/2} F=1, m_F=0 | 1, -1 | 5P_{3/2} F=1, m_F=1 \rangle = -\sqrt{\frac{3}{20}} \langle J=1/2, m_J=1/2 | 1, -1 | J=3/2, m_J=3/2 \rangle - \sqrt{\frac{1}{5}} \langle J=1/2, m_J=-1/2 | 1, -1 | J=3/2, m_J=1/2 \rangle = -\sqrt{\frac{5}{24}} C \quad (2 \text{ 分})$$

$|5P_{3/2} F=1, m_F=1\rangle$ 到 $|5S_{1/2} F=1, m_F=1\rangle$ 的跃迁为 π 跃迁, 跃迁矩阵元为:

$$\langle 5S_{1/2} F=1, m_F=1 | 1, 0 | 5P_{3/2} F=1, m_F=1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{10}} \langle J=1/2, m_J=1/2 | 1, 0 | J=3/2, m_J=1/2 \rangle + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{10}} \langle J=1/2, m_J=-1/2 | 1, 0 | J=3/2, m_J=-1/2 \rangle = -\sqrt{\frac{5}{24}} C \quad (2 \text{ 分})$$

所以, 二者的跃迁几率比值为 1:1 (2 分)

7. 如下图所示, 从 $t=0$ 开始, 一速度为定值的原子束依次通过两个作用区间。设原子内部为无弛豫的二能级结构 ($|1\rangle$ 和 $|2\rangle$), 两个能级的能量本征值分别为 $\hbar\omega_1$ 和 $\hbar\omega_2$ ($\omega_1 > \omega_2$), 且 $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$ 。两个作用区域的振荡场频率均为 ω , 与原子共振跃迁的失谐为 $\Delta = \omega_0 - \omega$, 两个场的相位差别为 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ 。在两个作用区间, 只考虑原子与电场的电偶极相互作用 $H_E = -\mathbf{er} \cdot \mathbf{E}$, 且电场强度满足 $|\langle 2|\mathbf{er}|1\rangle| E_0 = \hbar\Omega_R$ 。在薛定谔表象下, 原子态的演化可以写成 $|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$ 。求:

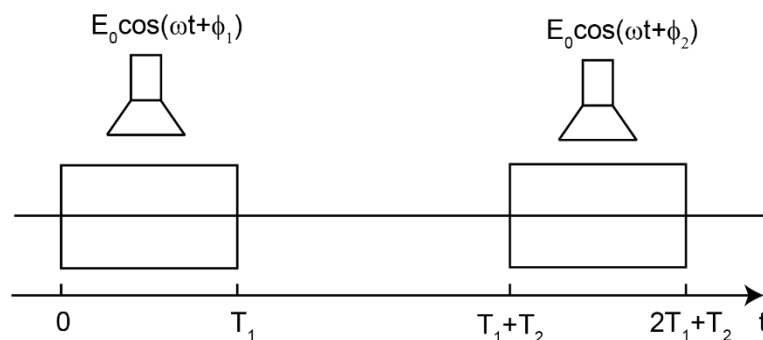
a. (8 分) 列出在 $0 \leq t \leq T_1$ 时, $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 的演化方程, 以及作旋转波近似后新的方程;

b. (10 分) 已知 $0 \leq t \leq T_1$ 时, $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 的结果为:

$$C_1(t) = \left\{ C_1(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi(0)} C_2(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{\frac{i\Delta t}{2} - i\omega_1 t}$$

$$C_2(t) = \left\{ C_2(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi(0)} C_1(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{-\frac{i\Delta t}{2} - i\omega_2 t}$$

这里, $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$, $\phi(0)$ 是电场在 $t=0$ 时的相位。设 $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$, 给出 $C_2(2T_1+T_2)$ 的表达式。



(a) 系统的哈密顿量为:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -\Omega_R \cos(\omega t + \phi_1) \\ -\Omega_R \cos(\omega t + \phi_1) & \omega_2 \end{pmatrix}$$

根据薛定谔方程, 系统的演化为:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

从而有: $\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega_1 C_1(t) + i\Omega_R \cos(\omega t + \phi_1) C_2(t) \\ -i\omega_2 C_2(t) + i\Omega_R \cos(\omega t + \phi_1) C_1(t) \end{pmatrix}$ (4 分)

作代换 $C_i(t) = c_i(t)e^{-i\omega_i t}$, 略去高频振荡部分 (旋转波近似), 得:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\Omega_R}{2} c_2(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t - i\phi_1} \\ i \frac{\Omega_R}{2} c_1(t) e^{i(\omega - \omega_0)t + i\phi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\Omega_R}{2} c_2(t) e^{i\Delta t - i\phi_1} \\ i \frac{\Omega_R}{2} c_1(t) e^{-i\Delta t + i\phi_1} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

(b) 根据 $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$, 在 $t=T_1$ 时, 由所给的表达式有:

$$C_1(T_1) = \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] \right\} e^{\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_1 T_1} \quad (1 \text{ 分})$$

$$C_2(T_1) = \left\{ i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right\} e^{-\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_2 T_1} \quad (1 \text{ 分})$$

在 $t=T_1$ 到 T_1+T_2 的过程中, 原子自由演化:

$$C_1(T_1 + T_2) = \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] \right\} e^{\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_1(T_1+T_2)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$C_2(T_1 + T_2) = \left\{ i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right\} e^{-\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_2(T_1+T_2)} \quad (2 \text{ 分})$$

从 $t=T_1+T_2$ 开始, 又可以使用 (b) 中给出的演化结果, 但需要使用 $C_i(T_1+T_2)$ 作为 $C_i(0)$, 以及将场的初始相位换为区间二的电场在 $t=T_1+T_2$ 时的相位

$\omega(T_1+T_2)+\phi_2$ 。在 $t=2T_1+T_2$ 时

$$\begin{aligned} C_2(2T_1 + T_2) &= \left\{ i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] e^{-\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_2(T_1+T_2)} \right. \\ &\quad + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i[\omega(T_1+T_2)+\phi_2]} \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) e^{\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_1(T_1+T_2)} \right\} e^{-\frac{i\Delta T_1}{2} - i\omega_2 T_1} \\ &= i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) e^{-i\Delta T_1 - i\omega_2(2T_1+T_2)} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. e^{i\Delta\phi} e^{-i\Delta T_2} \left[\cos\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$