2023中国科学技术大学

量子力学A期终考试试题卷

姓名 **学号** **成绩(参考解答)**

1. 考虑一个二能级体系，其哈密顿算符在某力学量表象中表达为

$$H=\begin{pmatrix} E_1+\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & E_2+\epsilon \end{pmatrix} \tag{1}$$

式中约定E_1，E_2与ϵ皆为实常数，它们的取值满足不等式$E_2>E_1\gg\epsilon>0$. (a) 请精确求解体系的能量本征值谱和能量本征矢量系(10分). (b) 请使用微扰论计算能量本征态和本征值的近似表达式，要求能量本征态与能量本征值的精度分别保持在参数ϵ的线性和二次幂(10分).

解:

(a) 设能量本征值方程为$H|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$，试把$|\lambda\rangle$表为:

$$|\lambda\rangle=\begin{pmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

则决定能量本征值λ的方程是:

$$\begin{vmatrix} E_1+\epsilon-\lambda & \epsilon \\ \epsilon & E_2+\epsilon-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

即:

$$\lambda^2-(E_1+E_2+2\epsilon)\lambda+\big[E_1E_2+(E_1+E_2)\epsilon\big]=0 \tag{4}$$

体系的能量本征值谱是:

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\left[(E_1+E_2+2\epsilon)\pm\sqrt{(E_2-E_1)^2+4\epsilon^2}\right] \tag{5}$$

将上式做泰勒展开并把精度保持到ϵ^2，则体系能量本征值的近似值是:

$$\lambda_\pm\approx\frac{1}{2}\Big[(E_1+E_2)\pm(E_2-E_1)\Big]+\epsilon\pm\frac{\epsilon^2}{E_2-E_1} \tag{6}$$

换言之，

$$\lambda_+\approx E_2+\epsilon+\frac{\epsilon^2}{E_2-E_1},\qquad \lambda_-\approx E_1+\epsilon-\frac{\epsilon^2}{E_2-E_1} \tag{7}$$

归一化能量本征矢量的二分量$(a_\lambda,\ b_\lambda)$决定于方程组:

$$(E_1+\epsilon-\lambda)a_\lambda+\epsilon b_\lambda=0,\qquad |a_\lambda|^2+|b_\lambda|^2=1 \tag{8}$$

它的解可取为:

$$a_\lambda = \frac{\epsilon}{\sqrt{(E_1+\epsilon-\lambda)^2+\epsilon^2}}, \qquad b_\lambda = -\frac{E_1+\epsilon-\lambda}{\sqrt{(E_1+\epsilon-\lambda)^2+\epsilon^2}} \tag{9}$$

所以，H属于本征值$\lambda_\pm$的本征矢量是:

$$|\lambda_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{(E_1+\epsilon-\lambda_\pm)^2+\epsilon^2}}\begin{bmatrix}\epsilon\\ -(E_1+\epsilon-\lambda_\pm)\end{bmatrix} \tag{10}$$

将上式按小量ϵ做泰勒展开并精确到ϵ的一次幂，我们有:

$$|\lambda_+\rangle \approx \begin{bmatrix}\epsilon/(E_2-E_1)\\ 1\end{bmatrix}, \qquad |\lambda_-\rangle \approx \begin{bmatrix}1\\ -\epsilon/(E_2-E_1)\end{bmatrix} \tag{11}$$

(b)现在把哈密顿算符重新表为$H = H_0 + H'$,

$$H_0 = \begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix}, \qquad H' = \begin{pmatrix}\epsilon & \epsilon\\ \epsilon & \epsilon\end{pmatrix} \tag{12}$$

视H_0为H的主体，H'为微扰. H_0与H'均为厄米矩阵，E_1和E_2是H_0的两个本征值. H_0属于这两个本征值的本征矢量分别为$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$|2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$H'$在其中的矩阵元求得为:

$$\langle i|H'|j\rangle = \epsilon\,; \qquad i,\ j = 1,\ 2 \tag{13}$$

所以按非简并态微扰论，H的基态能量与能量本征矢量分别为:

$$\begin{aligned}\lambda_- &= E_1 + \langle 1|H'|1\rangle + \frac{|\langle 2|H'|1\rangle|^2}{E_1-E_2}\\ &= E_1+\epsilon-\frac{\epsilon^2}{E_2-E_1}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}|\lambda_-\rangle &= |1\rangle + \frac{\langle 2|H'|1\rangle}{E_1-E_2}|2\rangle\\ &= |1\rangle + \frac{\epsilon}{E_1-E_2}|2\rangle\\ &= \begin{bmatrix}1\\ -\epsilon/(E_2-E_1)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

H的第一激发态能量与能量本征矢量分别为:

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= E_2 + \langle 2|H'|2\rangle + \frac{|\langle 1|H'|2\rangle|^2}{E_2-E_1}\\ &= E_2+\epsilon+\frac{\epsilon^2}{E_2-E_1}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}|\lambda_+\rangle &= |2\rangle + \frac{\langle 1|H'|2\rangle}{E_2-E_1}|1\rangle\\ &= |2\rangle + \frac{\epsilon}{E_2-E_1}|1\rangle\\ &= \begin{bmatrix}\epsilon/(E_2-E_1)\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

显然，两种计算给出的结果是一致的.

2. 考虑一个在中心力场$V(r)$中运动的零自旋粒子，设其处在由如下波函数描写的量子态：

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} R(r) \Theta(\theta) \cos(3\phi) \tag{18}$$

式中因子波函数$R(r)$与$\Theta(\theta)$的函数形式均未知. (a) 倘若在此态下对体系的轨道角动量z-分量L_3做一次测量，请问可能的测量值有哪些(10分)? (b) 倘若接下来测量体系的轨道角动量平方$\boldsymbol{L}^2$，请问有哪些可能的测量值(10分)?

解：

(a) 注意到$\hat{L}_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$，且

$$\cos(3\phi) = \frac{1}{2}\left[e^{3i\phi} + e^{-3i\phi}\right] \tag{19}$$

我们看到：

$$\hat{L}_3 \psi(r, \theta, \phi) \propto \hat{L}_3 \cos(3\phi) = \frac{1}{2}\left[(3\hbar) e^{3i\phi} + (-3\hbar) e^{-3i\phi}\right] \tag{20}$$

所以，在所给的$\psi(r, \theta, \phi)$态下测量L_3，可能的测量值只有$\pm 3\hbar$.

(b) 轨道角动量平方$\boldsymbol{L}^2$的测量值是它的本征值，即$l(l+1)\hbar^2$. 角量子数l是磁量子数m的最大取值. 在所指定的量子态$\psi(r, \theta, \phi)$下m的可能取值只有$m = \pm 3$，它意味着$l \geq 3$. 所以，倘若在题目所给的$\psi(r, \theta, \phi)$态下测量$\boldsymbol{L}^2$，可能的测量值有：

$$l(l+1)\hbar^2 \,; \qquad l = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots \tag{21}$$

3. 考虑由全同粒子构成的二粒子体系. 设粒子质量为μ，自旋为$s = 1/2$. 不计二粒子之间可能存在的相互作用，体系的哈密顿算符可表为$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$，式中

$$\hat{H}_j = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x_j^2, \qquad (j = 1,\ \ 2) \tag{22}$$

计及粒子自旋，请分别确定出体系前2个最低能级的：(a)能量本征值(5分)；(b)归一化能量本征函数(10分)；(c)各个能级的简并度(5分).

Hint:

$\hat{H}_j$本征值方程$\hat{H}_j \psi_{n_j}(x_j) = \varepsilon_{n_j} \psi_{n_j}(x_j)$的解是：

$$\varepsilon_{n_j} = \left(n_j + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad \psi_{n_j}(x_j) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^{n_j} n_j!}} H_{n_j}(\alpha x_j) e^{-\alpha^2 x_j^2/2}, \qquad n_j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{23}$$

式中$\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$，$H_{n_j}(\alpha x_j)$是$n_j$阶的厄米多项式. 几个低阶厄米多项式的显示表达式是：$H_0(\alpha x_j) = 1$，$H_1(\alpha x_j) = 2\alpha x_j$，$H_2(\alpha x_j) = 4\alpha^2 x_j^2 - 2$.

解：

(a) 体系基态的能量本征值为$E_1 = \hbar\omega$，第一激发态的能量本征值为$E_2 = 2\hbar\omega$.

(b) 全同费米子体系的波函数须关于粒子交换具有反对称性. 因此，体系归一化的基态波函数是：

$$\Psi_1(1,2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right] \tag{24}$$

而归一化的第一激发态波函数是：

$$\Psi_2(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)-\psi_1(x_1)\psi_0(x_2)\Big]\chi_{1,m_s} \tag{25}$$

和

$$\Psi_2'(1,2)=\frac{1}{2}\Big[\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)+\psi_1(x_1)\psi_0(x_2)\Big]\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right] \tag{26}$$

其中χ_{1,m_s}是自旋三重态波函数，它有3种候选形式：

$$\begin{aligned}\chi_{11}&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\\ \chi_{10}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right]\\ \chi_{1,-1}&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\end{aligned} \tag{27}$$

(c) 体系的基态不简并，$f_1=1$. 第一激发态是4重简并的，$f_2=4$.

4. 氢原子起初($t\leq 0$)处在基态$\psi_{100}(\boldsymbol{r})$. 从$t=0$时刻起将其置于时变的均匀外电场$\boldsymbol{E}(t)=\mathscr{E}_0 e^{-t/\tau}\boldsymbol{e}_3$中，式中$\tau$为一正的实参数，$\boldsymbol{e}_3$是笛卡尔坐标系第3轴方向的单位基矢. 使用含时微扰论至一级近似，计算：在足够长的时间之后(即$t\to\infty$)，氢原子被发现处在第一激发态[即氢原子主量子数$n=2$的能量本征态$\psi_{21m}(\boldsymbol{r})$]的概率(20分). 计算过程中请忽略电子的自旋.

解：

氢原子中的电子与时变外电场之间存在电偶极相互作用，

$$\hat{V}(t)=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}(t)=e\mathscr{E}_0 x_3 e^{-t/\tau}=e\mathscr{E}_0 r\cos\theta e^{-t/\tau} \tag{28}$$

$\hat{V}(t)$引起的电子跃迁矩阵元是$\langle f|x_3|i\rangle$，其中$|i\rangle=|100\rangle$，$|f\rangle=|21m\rangle$，磁量子数m的可能取值是0和±1. 注意到$\boldsymbol{r}=x_i\boldsymbol{e}_i$是矢量算符，$\left[\hat{L}_3,x_j\right]=i\hbar\epsilon_{3jk}x_k$，且$|i\rangle$和$|f\rangle$均是$\hat{L}_3$的本征态，我们有：

$$i\hbar\epsilon_{3jk}\langle 21m|x_k|100\rangle=\langle 21m|\left[\hat{L}_3,x_j\right]|100\rangle=m\hbar\langle 21m|x_j|100\rangle \tag{29}$$

由此知：$m\langle 21m|x_3|100\rangle=0$. 所以，

$$\langle 21,\pm1|x_3|100\rangle=0 \tag{30}$$

唯一可能非零的跃迁矩阵元是$\langle 210|x_3|100\rangle$. 位置表象中氢原子前两个最低的能量本征函数是：

$$\begin{aligned}\psi_{100}(r,\theta,\phi)&=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}\\ \psi_{210}(r,\theta,\phi)&=\frac{r}{4\sqrt{2\pi}\,a^{5/2}}e^{-r/2a}\cos\theta\end{aligned} \tag{31}$$

式中a是电子的玻尔半径，

$$a=\frac{\hbar^2}{\mu e^2} \tag{32}$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\langle 210| x_3 |100\rangle &= \int \mathrm{d}^3x\ \psi^*_{210}(\boldsymbol{r}) x_3 \psi_{100}(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}\ a^4} \int_0^\infty r^4 e^{-3r/2a} \mathrm{d}r \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}\ a^4} \cdot \frac{256a^5}{81} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{256}{243\sqrt{2}} a \\
&= \frac{2^8}{3^5\sqrt{2}} a
\end{aligned} \tag{33}
$$

电子跃迁初末态之间的能级差可通过

$$
\omega_{fi} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = -\frac{e^2}{2a\hbar}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3e^2}{8a\hbar} \tag{34}
$$

描写. 所以，时变外电场引起的氢原子中电子从基态$|100\rangle$跃迁到第一激发态$|210\rangle$的概率幅是：

$$
\begin{aligned}
a_f^{(1)}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle f|\hat{V}(t')|i\rangle e^{i\omega_{fi}t'} \mathrm{d}t' \\
&= \frac{e\mathscr{E}_0}{i\hbar} \langle 210| x_3 |100\rangle \int_0^t \exp[-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{fi})t'] \mathrm{d}t' \\
&= \frac{e\mathscr{E}_0}{i\hbar} \cdot \frac{2^8 a}{3^5\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau}{1 - i\omega_{fi}\tau} \left[1 - e^{-(1-i\omega_{fi}\tau)t/\tau}\right]
\end{aligned} \tag{35}
$$

当$t \to \infty$，

$$
a_f^{(1)}(\infty) \approx \frac{e\mathscr{E}_0}{i\hbar} \cdot \frac{2^8 a}{3^5\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau}{1 - i\omega_{fi}\tau} \tag{36}
$$

跃迁概率为：

$$
\mathcal{P}_{fi}(\infty) = \left|a_f^{(1)}(\infty)\right|^2 = \frac{2^{15} a^2 e^2 \mathscr{E}_0^2}{3^{10}\hbar^2} \frac{\tau^2}{1 + (\omega_{fi}\tau)^2} \tag{37}
$$

电子跃迁到第一激发态$|211\rangle$和$|21,-1\rangle$的概率均为零.

5. 一个质量为μ、能量为$E = \hbar^2 k^2/2\mu$的自由粒子进入到中心力场$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$并发生了弹性散射，约定常参数V_0与a均大于零，它们分别描写相互作用有效势能的峰值和力程. (a) 使用一级波恩近似计算粒子的微分散射截面(10分)；(b) 求出总散射截面(7分)；(c)倘若$E \approx V_0 = \gamma\hbar^2/2\mu a^2$且无量纲参数$\gamma \gg 5$，请写出总散射截面的近似表达式(3分).

Hint:

$$
\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin(\beta x) x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\,\beta}{4\alpha^{3/2}}\ e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\ ; \qquad \forall\ \alpha > 0,\ \ \beta > 0 \tag{38}
$$

解:

(a) 根据弹性散射的一级波恩近似，散射振幅由下式决定：

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{2\mu}{\hbar^2 q}\int_0^\infty V(r)\sin(qr)r\mathrm{d}r = -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty e^{-r^2/a^2}\sin(qr)r\mathrm{d}r \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}\mu V_0 a^3}{2\hbar^2}\exp\left(-a^2q^2/4\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

式中$q=2k\sin(\theta/2)$散射前后粒子的动量转移，θ为散射角，$k=\sqrt{2\mu E}/\hbar$. 微分散射截面为：

$$
\sigma(\theta)=\left|f(\theta)\right|^2=\frac{\pi\mu^2V_0^2a^6}{4\hbar^4}\exp\left(-a^2q^2/2\right) \tag{40}
$$

(b) 总散射截面是：

$$
\sigma_T=2\pi\int_0^\pi\sigma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2\mu^2V_0^2a^4}{2k^2\hbar^4}\left[1-e^{-2a^2k^2}\right] \tag{41}
$$

或者等价地，

$$
\sigma_T=\frac{\pi^2\mu(V_0a^2)^2}{4\hbar^2E}\left[1-e^{-4\mu a^2E/\hbar^2}\right] \tag{42}
$$

(c) 倘若$E\approx V_0=\gamma\hbar^2/2\mu a^2$且$\gamma\gg 5$，注意到$e^{-10}\approx 4.5\times 10^{-5}$，我们有：

$$
\sigma_T\approx\frac{1}{8}\gamma\pi^2a^2 \tag{43}
$$