中 国 科 学 技 术 大 学

2023 年秋季学期末考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　得分: __________

姓名: __________　　学号: __________

2024 年 1 月 6 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选五题. 每题均为 20 分.

问题 1 我们遇到过如下变换:

平移变换 $T(\mathbf{d})$, 其中向量 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ 表示了空间位置平移的大小和方向.

旋转变换 $D(\mathbf{n}, \phi)$, 即绕方向 $\mathbf{n}$ 旋转角度 ϕ.

空间反射 Π, 它改变了位置算子 $\mathbf{R}$ 和动量算子 $\mathbf{P}$ 的方向.

说明下面的变换是否对易.

(1) $T(\mathbf{d})$ 和 $T(\mathbf{d}')$, 其中 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{d}'$ 方向不同.

(2) $D(\mathbf{n}, \phi)$ 和 $D(\mathbf{n}', \phi')$, 其中 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 方向不同.

(3) $T(\mathbf{d})$ 和 Π.

(4) $D(\mathbf{n}, \phi)$ 和 Π.

问题 2 在考虑原子的电四极矩的时候, 需要计算 X^2, Y^2 或 Z^2 的矩阵元, 例如 Z^2 在 s 态和 d 态之间的矩阵元:

$$I \equiv \langle l' = 0, m' = 0 | Z^2 | l = 2, m = 0 \rangle$$

假设 I 是已知的, 用它表示

$$\langle l' = 0, m' = 0 | X^2 | l = 2, m \rangle$$

这里需要考虑 $m = \pm 2,\ \pm 1,\ 0$ 五种情况.

问题 3 考虑粒子的一维运动, 位置算子为 X, 动量算子为 P. 对于酉变换

$$U(\lambda) = \exp\left\{\mathrm{i}\lambda\,\frac{XP + PX}{2\hbar}\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

位置和动量分别变为

$$\tilde{X}(\lambda) = U(\lambda) X U^{\dagger}(\lambda), \quad \tilde{P}(\lambda) = U(\lambda) P U^{\dagger}(\lambda)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{X}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \tilde{X}(\lambda), \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{P}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \tilde{P}(\lambda)$$

并给出 $\tilde{X}(\lambda)$ 和 $\tilde{P}(\lambda)$ 的具体形式. 初条件可以设为 $\tilde{X}(0) = X, \tilde{P}(0) = P$.

问题 4 将氢原子置于方向垂直的匀强电场和匀强磁场中.

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} = \mathscr{E}_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$$

将外场带来的影响视为微扰, 不考虑电子的自旋以及精细结构, 在一级近似下计算第一激发态 ($n = 2$) 的能级.

可能用到的函数和积分:

- R_{2s} 是 $2s$ 态的径向波函数, R_{2p} 是 $2p$ 态的径向波函数.

  $$\int_0^{\infty} r^3 R_{2s}(r) R_{2p}(r)\,\mathrm{d}r = -3\sqrt{3}a_0$$

  这里 $a_0 = \frac{\hbar^2}{Me^2}$ 是 Bohr 半径, M 表示电子的质量, $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$, 其中 $q < 0$ 为电子电量.

- 球谐函数

  $$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

问题 5 先考虑一维经典谐振子, 质量为 m, 角频率为 ω, 在 $t<0$ 时静止. 在 $t=0$ 时对粒子施加一个冲力 $F(t)=\gamma\delta(t)$.

(1) 给出 $t>0$ 时振子的位置和动量.

在量子情形下考虑这个问题. 设 $t<0$ 时量子谐振子处于基态 $|0\rangle$, $t=0$ 时受到外力 $F(t)=\gamma\delta(t)$ 的作用.

(2) $t=0$ 时, 粒子受到外力作用后, 它的量子态是什么形式?

(3) 求出 $t>0$ 时粒子的量子态.

问题 6 为了考察电子的反常磁矩, 我们来分析电子在匀强磁场中的运动. 电子的质量记作 M, 带电量为 $q<0$. 匀强磁场沿 z 方向, 即 $\mathbf{B}=B\mathbf{e}_z$. 电子的 Hamilton 量为

$$H=\frac{1}{2M}(\mathbf{P}-q\mathbf{A})^2-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

矢量势 $\mathbf{A}$ 选择为对称形式, $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{R}$. $\boldsymbol{\mu}$ 是电子的磁矩, $\boldsymbol{\mu}=\gamma\mathbf{S}$. 其中旋磁比 γ 为

$$\gamma=(1+a)\frac{q}{M}$$

这里 a 是电子磁矩的反常量. 若 $a=0$, 则是我们通常遇到的情形.

电子的速度算子为

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{P}-q\mathbf{A}}{M}$$

(1) 验证下面的对易关系:

$$[V_x,H]=\mathrm{i}\hbar\omega V_y,\quad [V_y,H]=-\mathrm{i}\hbar\omega V_x,\quad [V_z,H]=0$$

其中 $\omega=\frac{qB}{M}$.

(2) 考虑下面三个期望值

$$C_1(t)=\langle S_zV_z\rangle,\quad C_2(t)=\left\langle S_xV_x+S_yV_y\right\rangle,\quad C_3(t)=\left\langle S_xV_y-S_yV_x\right\rangle$$

写出 $C_1(t), C_2(t)$ 和 $C_3(t)$ 的时间演化方程.

(3) 求出 t 时刻 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{V}$ 的期望值.