中国科学技术大学　2024 年 1 月

2023秋广义相对论期末考试

注意事项：

1. 本次考试为开卷考试；
2. 本文档根据评课社区回忆内容结合课程进行 AI 生成，并非真题，模型：`Gemini 3`；

解答题

1. 考虑一个静态球对称的弱引力场，其线元形式如下：

$$ds^2 = -\left(1 - 2\alpha\frac{GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 + 2\gamma\frac{GM}{r}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

其中 M 为中心天体质量，α 和 γ 为常数参数.

（1）利用测地线方程或拉格朗日量守恒律，写出光子在赤道平面 $(\theta = \pi/2)$ 运动的能量守恒方程和角动量守恒方程.

（2）推导光子的轨道微分方程 $u(\phi)$，其中 $u = 1/r$. 保留到 GM 的一阶项（弱场近似）.

（3）设光子从无穷远处入射，瞄准距离（Impact Parameter）为 b. 计算光线掠过大质量天体后的总偏折角 $\delta\phi$.

（4）结合结果说明：如果通过观测测得光线偏折角为爱因斯坦预言值 $4GM/bc^2$，这是否足以证明广义相对论的正确性?（提示：讨论参数 α 和 γ 对结果的贡献）.

2. 在黎曼几何中，自由粒子（或光子）沿测地线运动. 定义粒子运动的作用量 S 为路径长度（或固有时的积分）:

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\lambda \tag{2}$$

选取拉格朗日量为 $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$，其中 $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$，$\lambda$ 为仿射参数.

（1）写出欧拉-拉格朗日方程（Euler-Lagrange Equation）的一般形式:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\sigma} = 0 \tag{3}$$

（2）计算 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}$ 和 $\frac{\partial L}{\partial x^\sigma}$ 的具体表达式.（注意：度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是坐标 x 的函数）.

（3）将上述结果代入欧拉-拉格朗日方程，并利用度规的对称性，详细推导并证明测地线方程为:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{4}$$

其中 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ 是克里斯托费尔符号.

3. 考虑一个由三个黑洞组成的系统：一个质量为 M 的超大质量黑洞静止在原点，两个质量均为 m $(m \ll M)$ 的恒星级黑洞在同一平面内绕 M 作圆周运动. 这两个小黑洞始终位于直径的两端（即相位差为 180°），轨道半径均为 R.

（1）分析其中一个小黑洞 m 的受力情况（考虑中心黑洞 M 的引力和另一个小黑洞 m 的引力）. 利用牛顿力学推导该系统的轨道角速度 ω 的表达式.

（2）建立坐标系，设轨道平面为 xy 平面. 计算该双小黑洞系统（不包括静止的 M）的质量四极矩张量 Q_{ij} 的非零分量.

（提示：$Q_{ij} = \sum_A m_A (3x_i^A x_j^A - r_A^2 \delta_{ij})$. 利用 $x_1 = -x_2$ 的对称性简化计算）.

（3）根据四极辐射公式 $P = \frac{G}{5c^5} \langle \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}^{ij} \rangle$，计算该系统发射引力波的平均功率 $\bar{P}$.

（4）如果忽略中心黑洞 M，仅考虑这两个小黑洞在相互引力作用下绕共同质心（相距 $2R$）旋转，其引力波辐射功率 P_{binary} 是多少？比较两种情况下的辐射效率差异.