（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院

2021～2022 学年第 2 学期考试试卷

课程名称：热力学与统计物理（A）　　课程代码：________

开课院系：物理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

【答题中可能用到的数学关系：
Stirling 公式：当 N 很大时，$\ln N! \simeq N\ln N - N$】

一、　一个系统中有 N 个可分辨粒子，每个粒子可以处于能量是 0 或者 ε 的两个量子态上。不考虑相互作用。

1. 求温度为 T 时系统的熵，并写出高温和低温极限。

2. 求系统平均能量 U 和温度的关系，大体画出 U 随温度变化的曲线。

3. 求系统的热容 C 和温度的关系，大体画出 C 随温度变化的曲线。

1.

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = 1 + e^{-\beta\varepsilon} \\
U &= -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = N\varepsilon\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{N\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}+1} \\
F &= -Nk_BT\ln z = -Nk_BT\ln\left[1+e^{-\beta\varepsilon}\right] \\
S &= \frac{U-F}{T} = \frac{N\varepsilon/T}{e^{\beta\varepsilon}+1} + Nk_B\ln\left[1+e^{-\beta\varepsilon}\right]
\end{aligned}
$$

低温下：$S = N\frac{\varepsilon}{T}e^{-\beta\varepsilon} + Nk_Be^{-\beta\varepsilon} \sim 0$

高温下：$S \simeq \frac{N\varepsilon}{2T} + Nk_B\ln 2 \simeq Nk_B\ln 2$

2. 低温下：$U \simeq N\varepsilon e^{-\varepsilon/(k_BT)}$

高温下：$U \simeq N\varepsilon/2$

U 随温度变化如左下图，其中$\Theta = \varepsilon/k_B$。

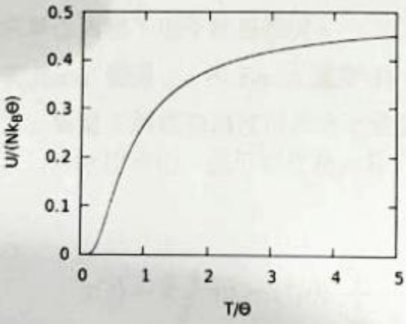
3.

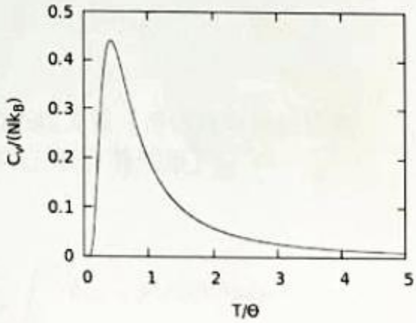
$$
C = \frac{\partial U}{\partial T} = Nk_B\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2\frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{(e^{\varepsilon/k_BT}+1)^2}
$$

低温下：$C \simeq Nk_B\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2e^{-\varepsilon/k_BT} \Rightarrow 0$

高温下：$C \simeq \frac{Nk_B}{2}\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2 \Rightarrow 0$

C 随温度变化如右下图，其中$\Theta = \varepsilon/k_B$。





二、 晶格振动可以用声子来描述，声子是化学势为零的玻色子。在简谐近似下，简单晶体的晶格振动能量为

$$
E = \sum_{i=1}^{3N}(n_i + 1/2)\hbar\omega_i
$$

其中 N 为构成晶格的原子数，i 表示声子的种类，$\hbar\omega_i$ 是一个第 i 种声子的能量，n_i 则是这种声子的数目。假设系统温度为 T，

1. 第 i 种声子的平均数 $\bar{n}_i$。
2. 假设所有种类的声子能量都是 $\hbar\omega_E$，求晶格振动的能量。
3. 同上题假设，求晶格振动的热容，并写出高温和低温下的极限。

1. 从玻色统计

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i}-1} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_i}-1}$$

2.

$$U = \bar{E} = \sum_i (\bar{n}_i + 1/2)\hbar\omega_i = 3N\left[\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_E}-1} + \frac{1}{2}\right]\hbar\omega_E$$

3.

$$C = \frac{\partial U}{T} = 3Nk_B\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{\hbar\omega_E/(k_BT)}}{(e^{\hbar\omega_E/(k_BT)}-1)^2}$$

低温下：$\hbar\omega_E \gg k_BT$，$C \simeq 3N\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}\right)^2 e^{-\hbar\omega_E/k_BT}$

高温下：$\hbar\omega_E \ll k_BT$，$C \simeq 3Nk_B$

三、 N 型 GaAs 量子阱可以近似为二维系统，动量为 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ 的电子能量为

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^*}.$$

其中 m^* 是电子的有效质量。阱中电子密度为 n。不考虑电子之间的相互作用。

1. 求单位面积下电子的态密度。
2. 求 Fermi 能量 ε_F 和 Fermi 温度 T_F。
3. 写出低温下热容随温度以及电子密度的依赖关系【可以只写出定性关系，并给出理由；也可以严格计算，然后分析计算结果】。

1.

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= 2\int \delta[\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p})]\frac{d^2p}{h^2} = 2\frac{2\pi}{h^2}\int_0^\infty \delta(\varepsilon - p^2/2m^*)pdp \\ &= \frac{4\pi}{h^2}\frac{p}{p/m^*}\Big|_{p^2/2m^*=\varepsilon} = \frac{4\pi m^*}{h^2} \end{aligned}$$

2.

$$n = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi m^*}{h^2}\int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon = \frac{4\pi m^*}{h^2}\varepsilon_F$$

$$\varepsilon_F = \frac{nh^2}{4\pi m^*}$$

$$T_F = \varepsilon_F/k_B$$

3. 在强简并情况下，只有 Fermi 面附近 k_BT 范围内的电子才参与热运动，因此对热容有共享的电子数目大约为 $g(\varepsilon_F)k_BT$。从能量均分原理，每个参与热运动的电子对热容贡献约为 $3k_B/2$，因此热容约为

$$C \sim 3k_B^2 g(\varepsilon_F)T/2$$

因此低温下热容和温度成正比。

另外由于二维情况下态密度是能量无关的常数，因此热容不依赖于电子数。

四、 粒子约束在角频率为 ω 的一维谐振子势中。粒子的本征态可以用量子数 n 表示，相应的本征能量为 $(n+1/2)\hbar\omega$，n 的取值为所有非负整数：$0,1,2,3,\cdots$。在势阱中心插入一个挡板后，粒子本征态可以用两个 $(n\sigma)$ 表示，相应的本征能量同样为 $(n+1/2)\hbar\omega$，但是 n 只能取为正的奇数：$n=1,3,5,\cdots$；σ 可以取 L 或者 R，分别表示粒子在挡板左边或者右边。不考虑粒子之间的相互作用以及粒子全同性，系统的温度为 T，并且 $k_BT \gg \hbar\omega$。

1. 求中心没有挡板时每个粒子的平均自由能、能量和熵。
2. 求加入挡板前后每个粒子平均自由能、能量和熵的改变量。
3. 用特殊的方法加入挡板，使得粒子只能在挡板右边，求加入挡板前后每个粒子的平均自由能、内能和熵的改变。

1.

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh\beta\hbar\omega/2} \\
f &= -k_BT\ln z = k_BT\ln\left[2\sinh\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right] \simeq k_BT\ln\frac{\hbar\omega}{k_BT} \\
u &= -\frac{\partial \ln z}{\partial\beta} = \frac{\hbar\omega}{2}\frac{\cosh\beta\hbar\omega/2}{\sinh\beta\omega/2} \simeq k_BT \\
s &= \frac{u-f}{T} = k_B - T\ln\frac{\hbar\omega}{k_BT}
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
z' &= \sum_{n=1,3,5,\cdots} \omega_n e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = 2e^{-3\beta\hbar\omega/2}\frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{\sinh\beta\hbar\omega} \\
f' &= -k_BT\ln z' = \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT\ln\big[\sinh\beta\hbar\omega\big] = \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT\ln\frac{\hbar\omega}{k_BT} \\
u' &= -\frac{\partial \ln z'}{\partial\beta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\frac{\cosh\beta\hbar\omega}{\sinh\beta\hbar\omega} \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT \\
s' &= \frac{u'-f'}{T} = k_B - k_B\ln\frac{\hbar\omega}{k_BT} \\
\Delta f &= \Delta u = \frac{\hbar\omega}{2} \\
\Delta s &= s' - s = 0
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
z'' &= \sum_{n=1,3,5,\cdots} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-3\beta\hbar\omega/2}\frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{2\sinh\beta\hbar\omega} \\
f'' &= -k_BT\ln z'' = \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT\ln\big[2\sinh\beta\hbar\omega\big] \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT\ln\frac{2\hbar\omega}{k_BT} \\
u'' &= -\frac{\partial \ln z''}{\partial\beta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\frac{\cosh\beta\hbar\omega}{\sinh\beta\hbar\omega} \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT \\
\Delta u &= u'' - u = \frac{\hbar\omega}{2} \\
\Delta f &= f'' - f = \frac{\hbar\omega}{2} + k_BT\ln 2 \\
s'' &= \frac{u''-f''}{T} = k_B - k_B\ln\frac{2\hbar\omega}{k_BT} \\
\Delta s &= s'' - s = -k_B\ln 2
\end{aligned}
$$

五、 用如下 Curie-Weiss 模型解释顺磁—铁磁相变现象。系统中有 N ($N \gg 1$) 个格点，每个格点上有一个原子，其自旋取值可以为 ± 1。当第 i 个格点上的原子自旋为 s_i 时，系统总能量为

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{J}{N}\sum_{i\neq j=1}^{N} s_is_j - \mu H\sum_{i=1}^{N} s_i = -\frac{J}{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} s_i\Big)^2 + \frac{J}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i^2 - \mu H\sum_{i=1}^{N} s_i \\
&= -\frac{J}{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} s_i\Big)^2 - \mu H\sum_{i=1}^{N} s_i + J
\end{aligned}
$$

其中 J（$J>0$）为相互作用强度，μ 为原子的磁矩，H 为外加磁场强度。系统的总磁矩为 $M = \mu\sum_{i=1}^{N} s_i$。

1. 求系统磁矩为 M 时的微观状态数 Ω。
2. 求系统磁矩为 M 时的温度。

3. 求外磁场 H 趋于零时，系统有非零磁矩（即自发磁矩）的温度范围。

1. 假设有N_+ 原子自旋为1，有$N_- = N - N_+$ 个原子自旋为-1，则系统自旋为

$$
\begin{aligned}
M/\mu &= \sum_i s_i = N_+ - N_- = 2N_+ - N \quad \Rightarrow \\
N_+ &= \frac{N + M/\mu}{2} \qquad N_- = \frac{N - M/\mu}{2} \\
\Omega &= C_N^{N_+} = \frac{N!}{N_+!N_-!} \\
\ln\Omega &= N\ln N - N_+\ln N_+ - N_-\ln N_- \\
&= N\ln N - \frac{N + M/\mu}{2}\ln\frac{N + M/\mu}{2} - \frac{N - M/\mu}{2}\ln\frac{N - M/\mu}{2}
\end{aligned}
$$

2. 磁矩为M 时，系统的能量为

$$
E = -\frac{J}{N\mu^2}M^2 - HM + NJ
$$

$$
\begin{aligned}
\beta = \frac{1}{k_BT} &= \left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial E}\right) = \left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial E}\right) \\
&= \frac{-1}{2JM/(N\mu^2) + H}\left[-\frac{1}{2\mu}\ln\frac{N + M/\mu}{2} + \frac{1}{2\mu}\ln\frac{N - M/\mu}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4JM/(N\mu) + 2H\mu}\ln\frac{N + M/\mu}{N - M/\mu}
\end{aligned}
$$

3. 从上题可以解出

$$
\begin{aligned}
\frac{M}{N\mu} &= \tanh\frac{2H\mu + 4JM/(N\mu)}{k_BT} = \tanh\left[\frac{2H\mu}{k_BT} + \frac{4J}{k_BT}\frac{M}{N\mu}\right] \\
&\xrightarrow{H\to 0} \tanh\left[\frac{4J}{k_BT}\frac{M}{N\mu}\right]
\end{aligned}
$$

用图解法可以得到 M 具有非零解的条件是 $4J/k_BT > 1$，因此有自发磁矩的温度低于 $T_c = 4J/k_B$。