

2022 中国科学技术大学

量子力学期中考试试题卷

参考答案

姓名：

学号：

成绩：

说明与提示：

1. 共 4 题，每题 25 分，总分 100.
2. Levi-Civita 全反对称张量满足的恒等式是： $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.
3. 海维赛德阶梯函数 $\theta(s)$ 的定义是：

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

它具有重要性质： $\frac{d\theta(s)}{ds} = \delta(s)$.

试题正文：

1. 某一维量子力学粒子在 $t=0$ 时刻的状态由波函数

$$\Psi(x, 0) = Ax^2(a-x)^2\theta(x)\theta(a-x)$$

此处 $\theta(s)$ 为海维赛德阶梯函数.

- ① (5 分) 计算归一化常数 A .
- ② (10 分) 分别求出此量子态下粒子位置坐标与动量的平均值.
- ③ (10 分) 计算位置坐标与动量的不确定度, 检验海森堡测不准关系.

解：

- ① 波函数的归一化条件给出：

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, 0)|^2 = |A|^2 \int_0^a dx x^4 (a-x)^4 = |A|^2 \frac{a^9}{630}$$

$$A = \frac{3\sqrt{70}}{a^4 \sqrt{a}}$$

② 位置与动量的系综平均值分别为：

$$\langle x \rangle = \int dx x |\Psi(x, 0)|^2 = |A|^2 \int_0^a dx x^5 (a-x)^4 = \frac{a}{2}$$

$$\langle p \rangle = \int dx \Psi^*(x, 0) \frac{\hbar}{i} \Psi'(x, 0) = -i\hbar \int_0^a x^2 (a-x)^2 \frac{d[x^2(a-x)^2]}{dx} = 0$$

③ 因为：

$$\langle x^2 \rangle = \int dx x^2 |\Psi(x, 0)|^2 = |A|^2 \int_0^a dx x^6 (a-x)^4 = \frac{3a^2}{11}$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int dx \Psi^*(x, 0) \Psi''(x, 0) = -\hbar^2 |A|^2 \int_0^a x^2 (a-x)^2 \frac{d^2[x^2(a-x)^2]}{dx^2} = \frac{12\hbar^2}{a^2}$$

所以，

$$\Delta x = \frac{a}{2\sqrt{11}}, \quad \Delta p = \frac{2\sqrt{3}\hbar}{a}$$

二者的乘积确实符合测不准原理的制约：

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{3}{11}} \hbar \approx 0.52\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

2. 质量为 m 的一维量子力学粒子在 δ -势阱中运动：

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 g^2}{2m} \delta(x), \quad g > 0$$

① (10 分) 证明此体系可以处于束缚定态，相应的能量本征值与波

函数分别是：

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 g^4}{8m}, \quad \psi_0(x) = \frac{g}{\sqrt{2}} \exp[-g^2|x|/2]$$

② (5分) 倘若粒子的能量本征值 $E > 0$, 体系也可以处于如下散射

定态:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta(-x) \left[e^{ikx} - \frac{g^2}{g^2 + 2ik} e^{-ikx} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta(x) \frac{2ik}{g^2 + 2ik} e^{ikx}$$

③ (5分) 假设初始时刻粒子处于束缚定态, $\psi(x, t)|_{t=0} = \psi_0(x)$. 倘

若此时势阱强度参数发生突变 $g \rightarrow g' = ng$, 但波函数保持不变

(约定 $n > 1$). 此时测量粒子能量获得测量值大于零的概率是多

少?

④ (5分) 同③题设, 计算势阱强度突变前后体系能量系综平均值的

差值.

解:

① 定态薛定谔方程表为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - \frac{\hbar^2 g^2}{2m} \delta(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

亦即:

$$\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) + g^2 \delta(x) \psi(x) = 0$$

$x \rightarrow \pm \infty$ 处上式表为 $\psi'' + (2mE/\hbar^2) \psi = 0$. 所以, 仅当 $E < 0$ 时才存

在束缚态:

$$\psi_0(x) = A[\theta(x) \exp(-\kappa x) + \theta(-x) \exp(\kappa x)], \quad \kappa = \sqrt{-\frac{2mE_0}{\hbar^2}} > 0$$

上式中已经考虑了波函数在 $x=0$ 处的连续性。再计入波函数一阶导数在 $x=0$ 处的跃变，

$$\psi_0'(0^+) - \psi_0'(0^-) = -g^2 \psi_0(0) \rightarrow \kappa = \frac{g^2}{2} \rightarrow E_0 = -\frac{\hbar^2 g^4}{8m}$$

束缚态可以正常归一化，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 2|A|^2 \int_0^{\infty} \exp(-2\kappa x) dx = \frac{|A|^2}{\kappa} \rightarrow A = \sqrt{\kappa} = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

所以：

$$\psi_0(x) = \frac{g}{\sqrt{2}} [\theta(x) \exp(-g^2 x/2) + \theta(-x) \exp(g^2 x/2)] = \frac{g}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{g^2}{2}|x|\right)$$

② 倘若 $E > 0$ ，则定态薛定谔方程允许存在如下散射态解(假设粒子从 $x < 0$ 区域向势阱入射)：

$$\psi(x) = \theta(-x) [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}] + \theta(x) Ce^{ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$$

$x=0$ 处波函数及其一阶导数满足的衔接条件给出：

$$A + B = C, \quad ik(C - A + B) = -g^2 C$$

所以，

$$B = -\frac{g^2}{g^2 + 2ik} A, \quad C = \frac{2ik}{g^2 + 2ik} A$$

散射态波函数不能正常归一化，故不妨取 $A = 1/\sqrt{2\pi}$ 。如此，

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta(-x) \left[e^{ikx} - \frac{g^2}{g^2 + 2ik} e^{-ikx} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta(x) \frac{2ik}{g^2 + 2ik} e^{ikx}$$

③ 势阱强度参数发生突变 $g \rightarrow g' = ng$ 后，归一化束缚定态变为：

$$\psi'_0(x) = \frac{ng}{\sqrt{2}} [\theta(x) \exp(-n^2 g^2 x/2) + \theta(-x) \exp(n^2 g^2 x/2)]$$

$$E'_0 = -\frac{\hbar^2 n^4 g^4}{8m} = n^4 E_0 < 0$$

此时的初始量子态 $\psi_0(x)$ 虽然是束缚态，但却不是束缚定态。 $\psi_0(x)$ 与 $\psi'_0(x)$ 的内积为：

$$\langle \psi'_0 | \psi_0 \rangle = ng^2 \int_0^\infty \exp[-(n^2 + 1)g^2 x/2] dx = \frac{2n}{(n^2 + 1)}$$

此时，测量粒子能量得到测量值大于零的概率为：

$$P = 1 - |\langle \psi'_0 | \psi_0 \rangle|^2 = 1 - \frac{4n^2}{(n^2 + 1)^2} = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2$$

④ 势阱强度参数突变前，体系所处的量子态 $\psi_0(x)$ 是束缚定态，故能量的系综平均值就是本征值 E_0 ：

$$\langle E \rangle_g = E_0 = -\frac{\hbar^2 g^4}{8m}$$

强度参数发生突变后，体系的哈密顿算符表为：

$$\hat{H}' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2 g^2}{2m} n^2 \delta(x)$$

此时能量的系综平均值为：

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{ng} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)^* \hat{H}' \psi_0(x) dx \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \int_0^\infty [\psi'_0(x)]^2 dx - \frac{\hbar^2 g^2}{2m} n^2 [\psi_0(0)]^2 \\ &= -\frac{\hbar^2 g^4}{8m} (2n^2 - 1) \end{aligned}$$

二者的差值为：

$$\langle E \rangle_{ng} - \langle E \rangle_g = -\frac{\hbar^2 g^4}{4m} (n^2 - 1)$$

3. 一维量子力学简谐振子由哈密顿算符:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

描写.

① (15 分) 计算对易子 $[\hat{H}, \hat{p}\hat{x}]$. 利用计算结果证明在任一束缚定态 $|n\rangle$ 下简谐振子动能项与势能项的系综平均值相等.

② (10 分) 倘若简谐振子处在量子态 $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$,

请分别计算简谐振子动能与势能的系综平均值.

解:

① 根据量子力学基本对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{p}\hat{x}] &= \hat{p}[\hat{H}, \hat{x}] + [\hat{H}, \hat{p}]\hat{x} \\ &= \frac{\hat{p}}{2m}[\hat{p}^2, \hat{x}] + \frac{1}{2}m\omega^2[\hat{x}^2, \hat{p}]\hat{x} \\ &= -i\hbar \frac{\hat{p}^2}{m} + i\hbar m\omega^2 \hat{x}^2 \end{aligned}$$

亦即:

$$[\hat{H}, \hat{p}\hat{x}] = -2i\hbar \hat{T} + 2i\hbar \hat{V}$$

求上式在束缚定态 $|n\rangle$ 下的平均值, 结论为 $\langle T \rangle_n = \langle V \rangle_n$. 所以,

$$\langle T \rangle_n = \langle V \rangle_n = \frac{1}{2}E_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

② 把谐振子的哈密顿算符改写为:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

式中,

$$\hat{a} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$\hat{a}^\dagger$ 与 $\hat{a}$ 是占有数算符 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 本征值升降算符, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,

$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. 所以对于量子态

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$$

我们有:

$$\hat{H}|\psi\rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \left(2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \right]$$

所以,

$$\langle E \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{11}{6} \hbar\omega$$

4. 考虑两个彼此独立的简谐振子哈密顿算符 $\hat{H}_\pm$,

$$\hat{H}_\pm = \hbar \left(\hat{N}_\pm + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm, \quad [\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger] = 1$$

① (15 分) 利用 $\hat{a}_\pm$ 与 $\hat{a}_\pm^\dagger$ 构造如下线性厄米算符:

$$\hat{J}_1 = \frac{\hbar}{2} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+), \quad \hat{J}_2 = \frac{\hbar}{2i} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+),$$

$$\hat{J}_3 = \frac{\hbar}{2} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)$$

请证明它们可以诠释为某量子力学体系的角动量算符，且角动量平方算符可表为：

$$\hat{J}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \hat{N}(\hat{N} + 2)$$

式中 $\hat{N} = \hat{N}_+ + \hat{N}_-$ 。

② (10 分) 占有数算符 $\hat{N}_\pm$ 的归一化共同本征态是：

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(\hat{a}_+^\dagger)^{n_+} (\hat{a}_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0\rangle$$

式中 $|0\rangle$ 是具有性质 $\hat{a}_\pm |0\rangle = 0$ 的真空态， $n_\pm$ 是两个非负整数。

请证明 $|n_+, n_-\rangle$ 也可以诠释为 $(\hat{J}^2, \hat{J}_3)$ 的共同本征态，求出相应的本征值并确定相应的角量子数和磁量子数。

解：

① 候选角动量算符中涉及 $a_+^\dagger a_+$, $a_+^\dagger a_-$, $a_-^\dagger a_+$ 和 $a_-^\dagger a_-$ 这四个由

谐振子占有数升降算符构成的二次型：

$$[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-] = a_+^\dagger [a_+, a_+^\dagger] a_- = a_+^\dagger a_-,$$

$$[a_+^\dagger a_+, a_-^\dagger a_+] = a_-^\dagger [a_+^\dagger, a_+] a_+ = -a_-^\dagger a_+,$$

$$[a_+^\dagger a_+, a_-^\dagger a_-] = 0,$$

$$[a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] = a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger] a_+ + a_-^\dagger [a_+^\dagger, a_+] a_- = a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-,$$

$$[a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_-] = a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger] a_- = a_+^\dagger a_-,$$

$$[a_-^\dagger a_+, a_-^\dagger a_-] = a_-^\dagger [a_+^\dagger, a_-] a_+ = -a_-^\dagger a_+$$

所以，

$$[J_1, J_2] = \frac{\hbar^2}{4i} [a_+^\dagger a_- + a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+] = \frac{i\hbar^2}{2} [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+]$$

$$= i\hbar \frac{\hbar}{2} (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = i\hbar J_3,$$

$$\begin{aligned}
[J_2, J_3] &= \frac{\hbar^2}{4i} [a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-] \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} (a_+^\dagger a_- + a_-^\dagger a_+) = i\hbar J_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[J_3, J_1] &= \frac{\hbar^2}{4} [a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_- + a_-^\dagger a_+] = \frac{\hbar^2}{2} (a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+) \\
&= i\hbar \frac{\hbar}{2i} (a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+) = i\hbar J_2.
\end{aligned}$$

所以, 这些线性厄米算符服从对易关系 $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$, 表明

它们可以诠释为角动量算符的笛卡尔分量算符。注意到:

$$\hat{N}^2 = (\hat{N}_+ + \hat{N}_-)^2 = \hat{N}_+^2 + \hat{N}_-^2 + 2\hat{N}_+ \hat{N}_-$$

我们有:

$$\hat{J}_3^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{N}_+ - \hat{N}_-)^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{N}_+^2 + \hat{N}_-^2 - 2\hat{N}_+ \hat{N}_-) = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{N}^2 - 4\hat{N}_+ \hat{N}_-)$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1^2 &= \frac{\hbar^2}{4} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+) (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} [(\hat{a}_+^\dagger)^2 (\hat{a}_-)^2 + (\hat{a}_-^\dagger)^2 (\hat{a}_+)^2 + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- \hat{a}_-^\dagger + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \hat{a}_+ \hat{a}_+^\dagger]
\end{aligned}$$

亦即,

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1^2 &= \frac{\hbar^2}{4} [(\hat{a}_+^\dagger)^2 (\hat{a}_-)^2 + (\hat{a}_-^\dagger)^2 (\hat{a}_+)^2 + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- \hat{a}_-^\dagger + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \hat{a}_+ \hat{a}_+^\dagger] \\
&= \frac{\hbar^2}{4} [(\hat{a}_+^\dagger)^2 (\hat{a}_-)^2 + (\hat{a}_-^\dagger)^2 (\hat{a}_+)^2 + \hat{N} + 2\hat{N}_+ \hat{N}_-]
\end{aligned}$$

同理,

$$\hat{J}_2^2 = -\frac{\hbar^2}{4} [(\hat{a}_+^\dagger)^2 (\hat{a}_-)^2 + (\hat{a}_-^\dagger)^2 (\hat{a}_+)^2 - \hat{N} - 2\hat{N}_+ \hat{N}_-]$$

综合以上结果, 我们有:

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 &= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = \frac{\hbar^2}{2}(\hat{N} + 2\hat{N}_+\hat{N}_-) + \frac{\hbar^2}{4}(\hat{N}^2 - 4\hat{N}_+\hat{N}_-) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\hat{N}(\hat{N} + 2)\end{aligned}$$

② 因为 $|n_+, n_- \rangle$ 是占有数算符 $\hat{N}_+$ 和 $\hat{N}_-$ 的共同本征态,

$$\hat{N}_+ |n_+, n_- \rangle = n_+ |n_+, n_- \rangle, \quad \hat{N}_- |n_+, n_- \rangle = n_- |n_+, n_- \rangle$$

而

$$\hat{J}_3 = \frac{\hbar}{2}(\hat{N}_+ - \hat{N}_-), \quad \hat{J}^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\hat{N}_+ + \hat{N}_-)(\hat{N}_+ + \hat{N}_- + 2)$$

所以,

$$\hat{J}_3 |n_+, n_- \rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-) |n_+, n_- \rangle,$$

$$\hat{J}^2 |n_+, n_- \rangle = \frac{\hbar^2}{4}(n_+ + n_-)(n_+ + n_- + 2) |n_+, n_- \rangle$$

故角量子数与磁量子数分别为 $j = (n_+ + n_-)/2$ 与 $m_j = (n_+ - n_-)/2$.