

中 国 科 学 技 术 大 学

2023 年秋季学期期末考试试卷

考试科目: 量子力学

得分: _____

姓名: _____ 学号: _____

2023 年 2 月 23 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选五题. 每题均为 20 分.

问题 1 考虑以下算子:

- 平移算子 $T(a)$: $T(a)\psi(x) = \psi(x - a)$;
- 空间反射算子: $\Pi\psi(x) = \psi(-x)$;
- 复共轭算子: $K\psi(x) = \psi^*(x)$;
- 全同粒子的交换算子: $P_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$.

回答下面的问题:

- (1) 哪些算子是线性的?
- (2) 给出它们的厄密共轭形式 (如果有的话).

问题 2 作一维运动的粒子质量为 M , 能级是离散的, 记作 E_n , 其中 $n = 0, 1, \dots$, 本征态记作 $|u_n\rangle$. 定义一个被称为 oscillator strength 的量:

$$f_n = \frac{2M}{\hbar^2}(E_n - E_0) |\langle u_n | X | u_0 \rangle|^2$$

- (1) 对于一维谐振子, 计算 $\sum_n f_n$.
- (2) 对于一般情形下的处于束缚态的一维量子系统, 再次计算 $\sum_n f_n$.

问题 3 考虑一维谐振子. 本征态记作 $|n\rangle$, $n = 0, 1, \dots$. a 和 a^\dagger 分别是降算子和升算子.

(1) 设 $F(X)$ 是位置算子 X 的函数, 证明

$$[a, F(X)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{dF(X)}{dX}, \quad [a^\dagger, F(X)] = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{dF(X)}{dX}$$

(2) 将 $F(X)$ 设为 $F(X) = e^{ikX}$, 证明

$$\langle n | e^{ikX} | 0 \rangle \propto \langle n-1 | e^{ikX} | 0 \rangle \propto \dots \propto \langle 0 | e^{ikX} | 0 \rangle$$

(3) 计算第 (2) 个问题中的比例系数, 再给出矩阵元 $\langle 0 | e^{ikX} | 0 \rangle$ 和 $\langle n | e^{ikX} | 0 \rangle$ 的具体结果.

(4) 设 $t = 0$ 时谐振子的状态是

$$|\psi(0)\rangle = e^{ikX} |0\rangle$$

计算在该状态中位置和动量的期望值.

(5) 继续上一个问题. 求出 t 时刻谐振子的能量测量结果为 E_n 的几率.

问题 4 质量为 M , 带电量为 q 的无自旋粒子被限制在两维平面内运动, 受到势能 $V(x, y)$ 的影响,

$$V(x, y) = \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2)$$

在 z 方向施加匀强磁场 \mathbf{B} . 简单地说, 这个模型说的是磁场中的带电谐振子. 问题是, 求出这个量子系统的能级.

问题 5 向量算子 $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ 与角动量算子 \mathbf{J} 的对易关系是

$$[V_\alpha, J_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma$$

其中下标 α, β 和 γ 表示分量 x, y, z .

(1) 考虑绕 x 轴的旋转变换

$$U(x, \phi) = e^{-i\phi J_x/\hbar}$$

证明

$$U^\dagger(x, \phi) V_\alpha U(x, \phi) = \sum_\beta R_{\alpha\beta} V_\beta$$

其中 $R_{\alpha\beta}$ 是 \mathbb{R}^3 空间中绕 x 轴旋转角度 ϕ 的变换矩阵的矩阵元.

(2) 如果旋转角度是 π , 证明

$$e^{-i\pi J_x/\hbar} |j, m\rangle \propto |j, -m\rangle$$

这里 $|j, m\rangle$ 是 J^2 和 J_z 的共同本征态.

(3) 如果一个电子依次经历如下变换过程:

- 绕 z 轴旋转 π ;
- 绕 y 轴旋转 π ;
- 绕 x 轴旋转 π .

那么电子的状态发生了怎样的改变?

问题 6 三维转子的转动惯量为 I , 具有电偶极矩 \mathbf{D} . 将转子置于 z 方向的匀强电场中, 电场强度的大小记作 \mathcal{E} . 将电场对转子的影响视作微扰.

(1) 计算基态能级的修正.

(2) 对于第一激发态, 计算出能级的非零修正结果.