（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院
2020～2021 学年第 2 学期考试试卷

课程名称：热力学与统计物理（A） 课程代码：________

开课院系：物理学院 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

【答题中可能用到的数学关系和物理常数：

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ ; \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ;$$

$$\int x^n e^{-x} dx = -\sum_{m=0}^{n} \frac{n! x^{n-m}}{(n-m)!} e^{-x} = -[x^n + n x^{n-1} + \cdots + n(n-1)\cdots 2x + n!]e^{-x};$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(p)\zeta(p); \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\Gamma(p)\zeta(p),$$

其中 $\Gamma(p)$ 是欧拉 Γ 函数。$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$；当 p 是整数时 $\Gamma(p+1) = p!$；$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ 是黎曼 ζ 函数。$\zeta(3/2) \simeq 2.612$，$\zeta(2) = \pi^2/6$，$\zeta(5/2) \simeq 1.3415$，$\zeta(3) \simeq 1.202$，$\zeta(4) = \pi^4/90$。

Boltzmann 常数$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K；电子质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg；光速 $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$。】

一、 一高分子链可以看成是有 N 个节的链条，每个节长度可以为a 或者 b。第 i 个节的振动可以用频率为 ω_i 的简谐振子来描述，可能的能量为 $\varepsilon_{in} = (n_i+1/2)\hbar\omega_i$，$n_i = 0,1,2,\cdots$ 为振动量子数。当节的长度为 a 时 $\omega_i = \omega_a$，长度为 b 时 $\omega_i = \omega_b$，且 $\omega_a > \omega_b$。系统温度为 T。

1. 求系统的配分函数。
2. 求此高分子链的平均长度 L 和能量，并写出低温和高温极限。
3. 求长度的涨落。

1. 解法一：单粒子配分函数

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{l=a,b}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega_l} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_a/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_a}} + \frac{e^{-\beta\hbar\omega_b/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_b}} \\
&= z_a + z_b
\end{aligned}
$$

系统配分函数$Z = z^N$。

解法二：

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{l_i n_i\}} e^{-\beta\sum_i (n_i+1/2)\hbar\omega_{l_i}} = \sum_{\{l_i\}}\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta\sum_i (n_i+1/2)\hbar\omega_{l_i}} \\
&= \sum_{\{l_i\}}\prod_i \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{l_i}/2}}{1+e^{-\beta\hbar\omega_{l_i}}} \\
&= \sum_{N_a=1}^{N} C_N^{N_a} z_a^{N_a} z_b^{N_b} = (z_a+z_b)^N
\end{aligned}
$$

2. 处于长度为l，量子数为n的节的个数为

$$
\begin{aligned}
f_{ln} &= \frac{N}{z} e^{-\beta\hbar(n+1/2)\omega_l} \\
N_l &= \sum_n f_{ln} = \frac{N}{z} z_l = N\frac{z_l}{z_a+z_b} \\
L &= \sum_{l=a,b} N_l l = N\frac{z_a a + z_b b}{z_a + z_b}
\end{aligned}
$$

解法二:

$$\overline{N_a} = \frac{1}{Z}\sum_{\{l_i n_i\}} N_a e^{-\beta\sum_i (n_i+1/2)\hbar\omega_{l_i}}$$
$$= \frac{1}{Z}\sum_{N_a} N_a C_N^{N_a} z_a^{N_a} z_b^{N_b} = \frac{1}{Z}\sum_{N_a} C_N^{N_a} z_a \frac{\partial z_a^{N_a} z_b^{N_b}}{\partial z_a} = \frac{z_a}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z_a}$$
$$= \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln z_a} = \frac{N}{Z} z_a = N\frac{z_a}{z_a+z_b}$$
$$\overline{L} = \overline{N_a a + N_b b} = \overline{N_a a + (N-N_a)b} = \overline{N_a}a + (N-\overline{N_a})b = N\frac{z_a a + z_b b}{z_a+z_b}$$

高温下，$\beta\hbar\omega_l \ll 1$，

$$z_l = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_l/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_l}} \simeq \frac{1}{\beta\hbar\omega_l} = \frac{k_B T}{\hbar\omega_a}$$
$$L = N\frac{\frac{ak_BT}{\hbar\omega_a}+\frac{bk_bT}{\hbar\omega_b}}{\frac{k_BT}{\hbar\omega_a}+\frac{k_BT}{\hbar\omega_b}} = N\frac{a\omega_b+b\omega_a}{\omega_a+\omega_b}$$

低温下，$\beta\hbar\omega_a \gg \beta\hbar\omega_b$，

$$z_l = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_l/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_l}} \simeq e^{-\beta\hbar\omega_l/2}$$
$$L \simeq N\frac{ae^{-\beta\hbar\omega_a/2}+be^{-\beta\hbar\omega_b/2}}{ae^{-\beta\hbar\omega_a/2}+be^{-\beta\hbar\omega_b/2}} \simeq Nb$$

3. 涨落

$$L = N_a a + N_b b = N_a a + (N-N_a)b = Nb + N_a(a-b)$$
$$\overline{L} = Nb + \overline{N_a}(a-b)$$
$$\overline{L}^2 = N^2b^2 + 2N\overline{N_a}(a-b)b + \overline{N_a}^2(a-b)^2$$
$$\overline{L^2} = \overline{[Nb+N_a(a-b)]^2} = \overline{N^2b^2+2NN_a(a-b)b+N_a^2(a-b)^2}$$
$$= N^2b^2 + 2N\overline{N_a}(a-b)b + \overline{N_a}^2(a-b)^2$$
$$\overline{\Delta L^2} = \overline{L^2} - \overline{L}^2 = (\overline{N_a^2} - \overline{N_a}^2)(a-b)^2 = \overline{\Delta N_a^2}(a-b)^2$$
$$\overline{N_a^2} = \frac{1}{Z}\frac{1}{Z}\sum_{N_a} N_a^2 C_N^{N_a} z_a^{N_a} z_b^{N_b} = \frac{1}{Z}\Big(z_a\frac{\partial}{\partial z_a}\Big)^2 Z = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial(\ln z_a)^2}$$
$$= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial(\ln z_a)^2} + \Big(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln z_a}\Big)^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial(\ln z_a)^2} + \overline{N_a}^2$$
$$\overline{\Delta N_a^2} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial(\ln z_a)^2} = z_a\frac{\partial}{\partial z_a}\frac{Nz_a}{z_a+z_b}$$
$$= N\Big(\frac{z_a}{z_a+z_b} - \frac{z_a^2}{(z_a+z_b)^2}\Big) = N\frac{z_a z_b}{(z_a+z_b)^2}$$
$$\overline{\Delta L^2} = N\frac{z_a z_b(a-b)^2}{(z_a+z_b)^2}$$

二、 利用下面模型理解磁陷阱蒸发降温：有 N 个质量为 m 的粒子被约束在二维磁陷阱里，位于 $\mathbf{r}=(x,y)$，动量为 $\mathbf{p}=(p_x,p_y)$ 的粒子能量为

$$\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2,$$

其中 ω 表征磁场约束强度。不考虑相互作用和全同性。

1. 求单粒子的态密度。
2. 系统原来的温度为 T，把磁陷阱约束减低，假设能量大于 ε_m 的粒子脱离陷阱，其余粒子仍然留在陷阱里。求剩余的粒子数 N'。
3. 恢复磁陷阱约束强度，剩余粒子重新达到平衡。假设恢复平衡过程系统总能量保持不变，求此时温度。

1.

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon)&=\int\delta(\varepsilon-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^2r^2)\frac{d^2rd^2p}{h^2}\\
&=\frac{(2\pi)^2}{h^2}\int_0^\infty rdr\int_0^\infty\delta(\varepsilon-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^2r^2)pdp\\
&=\frac{m(2\pi)^2}{h^2}\int_0^\infty\Theta(\varepsilon-\frac{1}{2}m\omega^2r^2)rdr\\
&=\frac{\varepsilon}{(\hbar\omega)^2}
\end{aligned}$$

2. 单粒子配分函数

$$z=\int_0^\infty g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon=\frac{1}{(\hbar\omega)^2}\int_0^\infty\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon=\frac{1}{(\hbar\omega\beta)^2}\int_0^\infty xe^{-x}dx=\frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2}=\Big(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\Big)^2$$

能量小于 ε_m 的粒子数为

$$\begin{aligned}
N'&=\frac{N}{z}\int_0^{\varepsilon_m}g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon=N(\beta\hbar\omega)^2\int_0^{\varepsilon_m}\frac{\varepsilon}{(\hbar\omega)^2}e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon\\
&=N\int_0^{\beta\varepsilon_m}xe^{-x}dx=N(-1-x)e^{-x}|_0^{\beta\varepsilon_m}\\
&=N[1-(1+\beta\varepsilon_m)e^{-\beta\varepsilon_m}]
\end{aligned}$$

3. 剩余粒子能量为

$$\begin{aligned}
U_r&=\int_0^{\varepsilon_m}\varepsilon\frac{N}{z}g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon=N(\beta\hbar\omega)^2\int_0^{\varepsilon_m}\frac{\varepsilon^2}{(\hbar\omega)^2}e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon\\
&=\frac{N}{\beta}\int_0^{-\beta\varepsilon_m}x^2e^{-x}dx=Nk_BT(-x^2-2x-2)e^{-x}|_0^{\beta\varepsilon_m}\\
&=Nk_BT\big\{2-[2+2\beta\varepsilon_m+(\beta\varepsilon_m)^2]e^{-\beta\varepsilon_m}\big\}
\end{aligned}$$

粒子数为 N'，温度为 T' 时系统能量为

$$\begin{aligned}U' &= \int_0^\infty \varepsilon \frac{N'}{z'} g(\varepsilon) e^{-\beta'\varepsilon} d\varepsilon = N'(\beta'\hbar\omega)^2 \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{(\hbar\omega)^2} e^{-\beta'\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{N'}{\beta'} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2N' k_B T'\end{aligned}$$

平衡后 $U_r = U'$，因此

$$\begin{aligned}T' &= \frac{U_r}{2N'k_B} = \frac{Nk_BT\left\{2 - [2 + 2\beta\varepsilon_m + (\beta\varepsilon_m)^2]e^{-\beta\varepsilon_m}\right\}}{2Nk_B[1 - (1 + \beta\varepsilon_m)e^{-\beta\varepsilon_m}]} \\ &= T\frac{1 - [1 + \beta\varepsilon_m + (\beta\varepsilon_m)^2/2]e^{-\beta\varepsilon_m}}{1 - (1 + \beta\varepsilon_m)e^{-\beta\varepsilon_m}}\end{aligned}$$

三、 由于相对论效应，物质和能量可以互相转换，因此在高温时需要考虑粒子和反粒子对的产生和湮灭。以电子和正电子为例，考虑相对论效应后，电子数 N_e 和正电子数 N_p 都不是确定的量，但是总电荷是确定的，即 $Q = -e(N_e - N_p)$ 是常数，其中 $-e$ 为电子电荷。正负电子都是自旋为 1/2 的费米子。

1. 假设正负电子单粒子能级为 ε_l^i，相应的简并度为 ω_l^i，其中 l 为能级指标，$i = e, p$ 分别代表电子和正电子。不考虑相互作用，求总能量为 E，电荷数为 Q 时正负电子的最可几分布函数。
2. 动量为 $\mathbf{p}$ 的正负电子的能量都是 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{m_e^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2} \simeq m_ec^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}$，其中 m_e 为电子质量。在 $T = 0$ K时，体积为 V 里的电荷 $Q = -eN$（$N > 0$），求此时电子的化学势 μ_e。
3. 同第 2 小题，求低温下（$k_BT \ll m_ec^2$）正电子数密度。
4. 在日常环境下，是否需要考虑正电子对系统的贡献?

1. 分布为 $\{a_l^i\}$，对应的微观态数 $\Omega(\{a_l^i\})$，

$$\begin{aligned}\Omega(\{a_l^i\}) &= \prod_l \gamma(a_l^e, \omega_l^e)\gamma(a_l^p, \omega_l^p) = \prod_l C_{\omega_l^e}^{a_l^e} C_{\omega_l^p}^{a_l^p} \\ &= \prod_l \frac{\omega_l^e!}{a_l^e!(\omega_l^e - a_l^e)!} \frac{\omega_l^p!}{a_l^p!(\omega_l^p - a_l^p)!} \\ \ln\Omega &= \sum_l \left[\ln\frac{\omega_l^e!}{a_l^e!(\omega_l^e - a_l^e)!} + \ln\frac{\omega_l^p!}{a_l^p!(\omega_l^p - a_l^p)!}\right] \\ &= \sum_l [\omega_l^e \ln\omega_l^e - a_l^e \ln a_l^e - (\omega_l^e - a_l^e)\ln(\omega_l^e - a_l^e) \\ &\quad + \omega_l^p \ln\omega_l^p - a_l^p \ln a_l^p - (\omega_l^p - a_l^p)\ln(\omega_l^p - a_l^p)]\end{aligned}$$

约束条件：$E=\sum_l(a_l^e\varepsilon_l^e+a_l^p\varepsilon_l^p)$ 以及 $N=-Q/e=\sum_l(a_l^e-a_l^p)$，
最可几分布条件为：$0=\delta\ln\Omega-\beta\delta E-\alpha\delta N$

$$0=\sum_l[\delta a_l^e(\ln\frac{\omega_l^e-a_l^e}{a_l^e}-\beta\varepsilon_l^e-\alpha)+\delta a_l^p(\ln\frac{\omega_l^p-a_l^p}{a_l^p}-\beta\varepsilon_l^p+\alpha)]$$

$$a_l^e=\frac{\omega_l^e}{e^{\beta\varepsilon_l^e+\alpha}+1}=\frac{\omega_l^e}{e^{\beta(\varepsilon_l^e-\mu)}+1}$$

$$a_l^p=\frac{\omega_l^e}{e^{\beta\varepsilon_l^e-\alpha}+1}=\frac{\omega_l^p}{e^{\beta(\varepsilon_l^p+\mu)}+1}$$

其中参数 $\beta=1/(k_BT)$，$\alpha=-\beta\mu$ 由两个约束条件确定。

2. 温度为零时，费米函数要么为一要么为零。因为总电荷数为负，因此电子数一定不为零，所以$\mu=\mu_e>0$。由此正电子数目$N_p=0$，$N_e=-Q/e+N_p=N$，

$$N=2\int\frac{d^3pd^3r}{h^3}\Theta[\mu_e-\varepsilon(\mathbf{p})]=\frac{8\pi V}{h^3}\int_0^\infty\Theta[\mu_e-m_ec^2-p^2/(2m_e)]p^2dp$$
$$=\frac{8\pi V}{3h^3}[2m_e(\mu_e-m_ec^2)]^{3/2}$$
$$\mu_e=m_ec^2+\frac{1}{2m_e}\Big(\frac{3h^3N}{8\pi V}\Big)^{2/3}=m_ec^2+\varepsilon_F$$

3. 低温下化学势$\mu\simeq\mu_e$，正电子粒子数为

$$N_p=2\int\frac{d^3pd^3r}{h^3}\frac{1}{e^{[\mu_e+\varepsilon(\mathbf{p})]/(k_BT)}+1}\simeq2\int\frac{d^3pd^3r}{h^3}e^{-[\mu_e+\varepsilon(p)]/(k_BT)}$$
$$=\frac{8\pi V}{h^3}\int_0^\infty dp\,p^2\exp\Big\{-\frac{m_ec^2+\varepsilon_F+m_ec^2+p^2/(2m_e)}{k_BT}\Big\}$$
$$=\frac{8\pi V}{h^3}e^{-(2m_ec^2+\varepsilon_F)/(k_BT)}(2m_ek_BT)^{3/2}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$$
$$=2V\Big(\frac{2\pi m_ek_BT}{h^3}\Big)^{3/2}e^{-(2m_ec^2+\varepsilon_F)/(k_BT)}$$

4. 日常生活里温度 $k_BT\ll m_ec^2$，正电子密度太小，因此可以不考虑正电子的影响。

四、 在半径为 R 里的纳米环中心加上磁通量为 Φ 的磁场。电子在此纳米环里的本征态由角动量量子数 l 描述，本征能量为

$$E_l=\frac{\hbar^2(l+\Phi/\Phi_0)^2}{2m^*R^2},\ \ l=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

其中 $\Phi_0=h/e$ 为量子磁通，m^* 为电子有效质量。环中电子数比较少，可以不考虑全同性。

1. 请写出单粒子配分函数。
2. 求每个电子的平均能量 u，并证明它是磁通 Φ 的周期函数。

3. 每个电子对电流 j 的贡献为 $2\pi R\frac{\partial u}{\partial\Phi}$，求低温和高温极限下电流和磁通的关系，并大体画出 Φ–j 曲线。

1. 单粒子配分函数

$$
\begin{aligned}
z(\Phi) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m^*R^2}(l+\Phi/\Phi_0)^2} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(l+\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} \qquad\qquad \Theta = \hbar^2/(2m^*R^2k_B)
\end{aligned}
$$

容易证明对任意整数n，$z(\Phi+n\Phi_0)=z(\Phi)$，

$$
\begin{aligned}
z(\Phi+n\Phi_0) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-[l+(\Phi+n\Phi_0)/\Phi_0]^2\Theta/T} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-[(l+n)+\Phi/\Phi_0]^2\Theta/T} \\
&\xRightarrow{l'=l+n} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} e^{-(l'+\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} = z(\Phi)
\end{aligned}
$$

即$z(\Phi)$ 是Φ的周期函数，周期为Φ_0。

2. 每个粒子的平均能量

$$
u(\Phi) = -\frac{\partial\ln z}{\partial\beta} = k_BT^2\frac{\partial\ln z}{\partial T} = \frac{2k_B\Theta}{z}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(l+\Phi/\Phi_0)^2 e^{-(l+\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T}
$$

同上题可以证明$u(\Phi+n\Phi_0)=u(\Phi)$ 是以Φ_0 为周期的函数。

3. 由于z，u 是Φ 的周期函数，$j=2\pi R\partial u/\partial\Phi$也是$\Phi$的周期函数．假设$-\Phi_0/2<\Phi<\Phi_0/2$，在此条件下，本征能量最小的态是$l=0$。因此低温下，

$$
\begin{aligned}
z &= e^{-(\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} + e^{-(\Phi/\Phi_0+1)^2\Theta/T} + e^{-(\Phi/\Phi_0-1)^2\Theta/T} + \cdots \\
&\simeq e^{-(\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} \\
u &= \frac{k_BT^2}{z}\frac{\partial z}{\partial T} \simeq \frac{k_B\Theta}{e^{-(\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T}}\Big(\frac{\Phi}{\Phi_0}\Big)^2 e^{-(\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} \\
&= k_B\Theta\Big(\frac{\Phi}{\Phi_0}\Big)^2 \\
j &= 2\pi R\frac{\partial u}{\partial\Phi} = 2\pi R = \frac{4\pi Rk_B\Theta}{\Phi_0^2}\Phi
\end{aligned}
$$

高温下，

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(l+\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(l+\Phi/\Phi_0)^2\Theta/T}dl \\
&= \sqrt{\frac{T}{\Theta}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T\pi}{\Theta}} \\
u &= k_BT^2\frac{\partial\ln z}{\partial T} = \frac{k_BT}{2} \\
j &= 2\pi R\frac{\partial u}{\partial\Phi} = 0
\end{aligned}
$$

五、 研究铁磁系统时常常利用自旋波理论：假设 $T = 0$ K时，系统具有完全的铁磁序，所有粒子自旋都指向同一个方向，例如 z 轴。对磁有序的偏离可以用元激发磁振子（magnon）来描述。磁振子可以看成是自旋为零的玻色子，并且其粒子数不守恒，化学势为零。没有外磁场时，低能下磁振子的色散关系为

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \alpha\mathbf{p}^2,$$

其中 $\mathbf{p}$ 为动量，$\alpha > 0$ 为常数。系统的磁矩大小可以表示成

$$M = M_0 - \gamma n,$$

其中 M_0 是最大磁矩，n 为磁振子密度，γ 为常数。

1. 求低温下三维铁磁系统磁矩和温度的关系。
2. 用这种方法得到的磁矩小于零时意味着系统的自发磁矩消失，变为顺磁相，系统不再有长程序。求三维铁磁系统的相变温度。
3. 证明在自旋波理论下，有限温度下二维系统没有铁磁长程序。

1. 磁振子密度为

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\mathbf{p})} - 1}\frac{d^3p}{h^3} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\alpha p^2} - 1}p^2 dp \\ &= \frac{2\pi}{h^3(\alpha\beta)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}dx = \frac{2\pi}{h^3(\alpha\beta)^{3/2}}\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \\ &= \zeta(3/2)\Big(\frac{\pi k_B T}{\alpha h^2}\Big)^{3/2} \\ M &= M_0 - \zeta(3/2)\Big(\frac{\pi k_B T}{\alpha h^2}\Big)^{3/2} \end{aligned}$$

2. 相变温度大约在$M = 0$处，即

$$T_c = \frac{\alpha h^2}{\pi k_B}\Big(\frac{M_0}{\gamma\zeta(3/2)}\Big)^{2/3}$$

3. 二维情况下

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\mathbf{p})} - 1}\frac{d^2p}{h^2} = \frac{2\pi}{h^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\alpha p^2} - 1}pdp \\ &= \frac{\pi}{\alpha\beta h^2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = \frac{\pi k_B T}{\alpha h^2}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} \end{aligned}$$

被积函数在$x \to 0$ 时为$\frac{1}{x}$，因此积分发散. 因此只要在温度不为零时，都有$n \to \infty$，因此得到的$M < 0$，由此在自旋波理论下，二维系统没有长程序。