2021 中国科学技术大学

量子力学期终考试试题卷

学号 **姓名** **成绩**

若干提示：

① 全卷共 5 题, 每题 20 分.

② 利用极角θ和方位角ϕ, 可以把(θ, ϕ)方向的单位矢量$\boldsymbol{n}$在笛卡尔直角坐标系中表为：

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3 \cos\theta + \boldsymbol{e}_1 \sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta\sin\phi$$

所以在泡利表象中，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

③ 球贝塞尔函数具有近似表达式：

$$j_l(x)\Big|_{x\ll 1} \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}$$

④ 几个可能有用的积分公式：

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{b}{a} - \frac{\pi^2 b^3}{6a^3} + O\left(b^4\right)\right)$$

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{3b}{4a} - \frac{\pi^2 b^3}{6a^3} + O\left(b^4\right)\right)$$

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{b}{a} - \frac{2\pi^2 b^3}{3a^3} + O\left(b^4\right)\right)$$

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{b}{2a} + O\left(b^4\right)\right)$$

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{b}{2a} - \frac{5\pi^2 b^3}{12a^3} + O\left(b^4\right)\right)$$

$$\int_0^a\int_0^a dxdy\ V(x,y)\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{a^2} = V_0\left(\frac{3b}{4a} - \frac{2\pi^2 b^3}{3a^3} + O\left(b^4\right)\right)$$

1. 一个质量为μ、能量为$E=\dfrac{k^2\hbar^2}{2\mu}$的自由粒子进入到球对称势场

$$V(r)=\frac{\beta\hbar^2}{2\mu a}\delta(r-a),\quad \beta>0$$

无量纲参数β的取值范围是$0<\beta\ll 1$以致于$V(r)$可以视为微扰. 假设$ka\ll 1$,

请使用分波法计算散射振幅、微分散射截面和总截面.

解:

按照微扰论的零级近似,散射波l分波的相移δ_l满足:

$$\sin\delta_l\approx-\frac{2\mu k}{\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\left[j_l(kr)\right]^2 r^2dr=-\beta\, ka\,\left[j_l(ka)\right]^2\approx-\beta\,\frac{(ka)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2}$$

因为$ka\ll 1$,只需要考虑$l=0$的s分波相移对散射振幅的贡献:

$$\delta_0\approx\sin\delta_0\approx-\beta ka$$

所以,散射振幅为:

$$f(\theta)\approx\frac{1}{k}\exp(i\delta_0)\sin\delta_0=-\beta a\exp(-i\beta ka)$$

微分散射截面与总截面分别为:

$$\sigma(\theta)=\left|f(\theta)\right|^2\approx\beta^2a^2$$

和

$$\sigma_T\approx 4\pi\beta^2a^2$$

2. 忽略电子自旋,设$t=0$时刻氢原子处在由波函数

$$\Psi(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sqrt{3}\psi_{100}(\boldsymbol{r})+\psi_{211}(\boldsymbol{r})-i\,\psi_{21,-1}(\boldsymbol{r})\right]$$

描写的量子态下,这里$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$是氢原子正交归一的能量本征函数。倘若氢原子在无观测者干扰的情形下自发地演化到t时刻$(t>0)$,

① 求出氢原子在t时刻的波函数$\Psi(\boldsymbol{r},t)$.

② 体系能量的平均值是多少? 它是否随时间变化?

③ t时刻电子轨道角动量量子数取值为$l=m=1$的概率是多少？

④ 倘若观测者在t时刻对电子的轨道角动量进行了一次测量，测量值为

$\boldsymbol{L}^2=2\hbar^2,\ L_3=-\hbar$，请问测量完成后体系的量子态由哪个波函数描写？

解：

①氢原子的能量本征值方程是

$$H\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})=E_n\psi_{nlm}(\boldsymbol{r}),\ \ E_n=\frac{E_1}{n^2},\ \ E_1=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$$

所以，

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{r},t)\ &=\exp\left(-iHt/\hbar\right)\Psi(\boldsymbol{r},0)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\exp\left(-iHt/\hbar\right)\left[\sqrt{3}\psi_{100}(\boldsymbol{r})+\psi_{211}(\boldsymbol{r})-i\,\psi_{21,-1}(\boldsymbol{r})\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sqrt{3}e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}(\boldsymbol{r})+e^{-iE_1t/4\hbar}\psi_{211}(\boldsymbol{r})-i\,e^{-iE_1t/4\hbar}\psi_{21,-1}(\boldsymbol{r})\right]\end{aligned}$$

② $\Psi(\boldsymbol{r},t)$态下体系能量的系综平均值为：

$$\langle E\rangle=\frac{1}{5}\left[3E_1+2\times\frac{E_1}{4}\right]=\frac{7E_1}{10}=\frac{7\mu e^4}{20\hbar^2}$$

它不随时间变化。

③ t时刻体系轨道角动量量子数取值$l=m=1$的概率为：

$$P_{l=m=1}=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\exp\left(-iE_1t/4\hbar\right)\right|^2=\frac{1}{5}=0.2$$

④ 测量完成后，体系所处的量子态为$\psi_{21,-1}(\boldsymbol{r})$.

3. 某量子力学体系存在着可观测力学量$\hat{A}$与$\hat{B}$，它们均与体系的哈密顿算符$\hat{H}$对易，即有$\left[\hat{A},\hat{H}\right]=\left[\hat{B},\hat{H}\right]=0$. 但$\hat{A}$与$\hat{B}$之间是反对易的，

$$\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=0$$

且$\hat{A}$和$\hat{B}$均没有零本征值. 进一步假设体系的量子态空间是一个有限维的Hilbert 空间. 试证明：

① 系统的能量本征态必定都是简并的.

② 力学量算符$\hat{A}$和$\hat{B}$对应矩阵的迹为零，即有$\mathrm{tr}(\hat{A}) = \mathrm{tr}(\hat{B}) = 0$.

解：

① 设$|n\rangle$是哈密顿算符$\hat{H}$与力学量算符$\hat{A}$的某个共同本征态，

$$\hat{H}\,|n\rangle = \epsilon_n\,|n\rangle, \quad \hat{A}\,|n\rangle = a_n\,|n\rangle$$

按题设，$a_n \neq 0$. 因为$\left[\hat{B},\, \hat{H}\right] = 0$与$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$，我们看到：

$$\hat{H}\left[\hat{B}\,|n\rangle\right] = \hat{B}\left[\hat{H}\,|n\rangle\right] = \hat{B}\left[\epsilon_n\,|n\rangle\right] = \epsilon_n\left[\hat{B}\,|n\rangle\right]$$

以及，

$$\hat{A}\left[\hat{B}\,|n\rangle\right] = -\hat{B}\left[\hat{A}\,|n\rangle\right] = -\hat{B}\left[a_n\,|n\rangle\right] = -a_n\left[\hat{B}\,|n\rangle\right]$$

前一个方程表明$|n\rangle$与$\hat{B}\,|n\rangle$均是哈密顿算符$\hat{H}$属于同一本征值ϵ_n的本征矢量，后一方程表明$|n\rangle$与$\hat{B}\,|n\rangle$是另一力学量算符$\hat{A}$属于不同本征值a_n与$-a_n$的本征矢量. 所以，

$$\hat{B}\,|n\rangle \neq b_n\,|n\rangle, \quad \langle n|\hat{B}|n\rangle = 0$$

亦即能量本征值ϵ_n是简并的. 鉴于ϵ_n选择上的任意性，我们得知体系的所有能量本征值均是简并的.

② 很明显，

$$\mathrm{tr}\left(\hat{B}\right) = \sum_n \langle n|\hat{B}|n\rangle = \sum_n 0 = 0$$

因为$|n\rangle$与$\hat{B}\,|n\rangle$成对出现，它们分别是力学量算符$\hat{A}$属于本征值a_n与$-a_n$的归一化本征矢量，

$$\langle n|n\rangle = 1, \quad \left[\langle n|\,\hat{B}^\dagger\right]\left[\hat{B}\,|n\rangle\right] = \langle n|\hat{B}^2|n\rangle = 1$$

我们有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\hat{A}\right) &= \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle = \frac{1}{2}\sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle + \frac{1}{2}\sum_n \left[\langle n|\,\hat{B}^\dagger\right]\hat{A}\left[\hat{B}\,|n\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_n \langle n|\left(\hat{A}+\hat{B}\hat{A}\hat{B}\right)|n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_n a_n\,\langle n|\left(\hat{I}-\hat{B}^2\right)|n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_n a_n\,(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4. 自旋$\frac{1}{2}$的量子力学体系可以处在两种不同的量子态上，

$$
|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle,\quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle
$$

式中$\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle$是泡利矩阵$\sigma_3$的本征右矢，

$$
\sigma_3\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle.
$$

① 假设对这两种自旋态进行同一方向$\boldsymbol{n}$上的投影测量，测量算符为$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$. 请问力学量算符$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$的本征值和本征态分别是多少？ 当$\boldsymbol{n}$为何种方向取值时，两输入态对应的测量值和塌缩几率完全相同？

② 现对该系统外加一沿方向$\boldsymbol{n}$的匀强磁场，对应的哈密顿算符为

$$
\hat{H} = \hbar\omega\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}
$$

式中ω是一具有频率量纲的实参数. 请问是否存在某个方向$\boldsymbol{n}$，使得动力学演化下$|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$都可以演化到各自的正交态上，即系统幺正演化满足条件

$$
\langle\psi_1|\hat{U}(t)|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\hat{U}(t)|\psi_2\rangle = 0
$$

如果存在这样的$\boldsymbol{n}$，试给出具体的演化时长t.

解：

① 因为$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$，倘若设$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$的本征值方程为$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$，不难看到：

$$
\lambda^2\,|\lambda\rangle = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2\,|\lambda\rangle = \sigma_i\sigma_j n_i n_j\,|\lambda\rangle = (\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k)n_i n_j\,|\lambda\rangle = n_i n_i\,|\lambda\rangle = |\lambda\rangle
$$

所以：

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1$$

在泡利表象中，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$属于本征值$\lambda_\uparrow = 1$的归一化本征矢量可取为：

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\, e^{i\phi} \end{bmatrix} = \cos(\theta/2)\left|\frac{1}{2}\right\rangle + \sin(\theta/2)\, e^{i\phi}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$属于本征值$\lambda_\downarrow = -1$的归一化本征矢量可取为：

$$|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)\, e^{i\phi} \end{bmatrix} = \sin(\theta/2)\left|\frac{1}{2}\right\rangle - \cos(\theta/2)\, e^{i\phi}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

由此知：

$$\left|\frac{1}{2}\right\rangle = \cos(\theta/2)\,|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)\,|\downarrow\rangle, \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \sin(\theta/2)\, e^{-i\phi}\,|\uparrow\rangle - \cos(\theta/2)\, e^{-i\phi}\,|\downarrow\rangle$$

二输入自旋态可分别表达为：

$$|\psi_1\rangle = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta/2) - \frac{1}{2}\sin(\theta/2)\, e^{-i\phi}\right]|\uparrow\rangle + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta/2) + \frac{1}{2}\cos(\theta/2)\, e^{-i\phi}\right]|\downarrow\rangle$$

和

$$|\psi_2\rangle = \left[\frac{1}{2}\cos(\theta/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta/2)\, e^{-i\phi}\right]|\uparrow\rangle + \left[\frac{1}{2}\sin(\theta/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta/2)\, e^{-i\phi}\right]|\downarrow\rangle$$

在二输入态下测量$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$获得测量值为$\lambda_\uparrow = 1$的概率分别为：

$$P_{1\uparrow} = \left|\langle\uparrow|\psi_1\rangle\right|^2 = \frac{3}{4}\cos^2(\theta/2) + \frac{1}{4}\sin^2(\theta/2) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta\cos\phi$$

和

$$P_{2\uparrow} = \left|\langle\uparrow|\psi_1\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\cos^2(\theta/2) + \frac{3}{4}\sin^2(\theta/2) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta\cos\phi$$

$P_{1\uparrow} = P_{2\uparrow}$的条件是：

$$\cos(\theta/2) = \pm\sin(\theta/2)$$

注意到极角θ的定义域是$0 \le \theta \le \pi$，此条件仅在$\theta = \pi/2$情形下才能成立(方位角ϕ的取值无限制).

② 时间演化算符是：

$$\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar} = \exp(-i\omega t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\omega t)^n}{n!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^n$$

注意到$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = I$，上式可简化为：

$$\hat{U}(t) = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$$

任意的自旋态$|\psi\rangle$要演化到其正交态，必然要保证条件：

$$0 = \langle\psi|\hat{U}(t)|\psi\rangle = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\,\langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi\rangle$$

厄米算符(例如$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$)在任意量子态下的平均值均为实数. 计及这一要素，上面的条件可重新表为：

$$\cos(\omega t) = 0, \quad \rightarrow t = \left(\frac{2n+1}{2\omega}\right)\pi,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

以及

$$\langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi\rangle = 0$$

对于给定的两个初始自旋态而言，我们有：

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,|\psi_1\rangle = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta/2) - \frac{1}{2}\sin(\theta/2)\,e^{-i\phi}\right]|\uparrow\rangle - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta/2) + \frac{1}{2}\cos(\theta/2)\,e^{-i\phi}\right]|\downarrow\rangle$$

与

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,|\psi_2\rangle = \left[\frac{1}{2}\cos(\theta/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta/2)\,e^{-i\phi}\right]|\uparrow\rangle - \left[\frac{1}{2}\sin(\theta/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta/2)\,e^{-i\phi}\right]|\downarrow\rangle$$

由此知：

$$\langle\psi_1|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\phi$$
$$\langle\psi_2|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi_2\rangle = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\phi$$

所以，$\langle\psi_1|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})|\psi_2\rangle = 0$的成立要求极角取值$\theta = \pi/2$与方位角取值$\phi = \pi/2$或者$\phi = 3\pi/2$. 换言之，$\boldsymbol{n} = (0,\ \pm 1,\ 0)$.

5. 两全同粒子被置于一宽度为a的无限深势阱中，$0 \le x_1,\ x_2 \le a$. 粒子质量为μ. 两粒子间存在一个很弱的等效短程排斥相互作用，

$$V(x_1,\ x_2) = \begin{cases} V_0, & |x_1 - x_2| \le b \\ 0, & |x_1 - x_2| > b \end{cases}$$

此处$0 < b \ll a,\ V_0 > 0$.

① 如果两粒子为自旋为零的玻色子，忽略粒子间的相互作用，求出此体系

基态和第一激发态的归一化波函数与相应的能量本征值.

② 计及粒子间的相互作用，精确到微扰论的一级修正，计算上一问中体系基态与第一激发态的能量本征值. 结果保留到参数b的非零领头阶.

③ 如果两粒子是一对自旋1/2费米子，且体系的自旋态处于三重态之一的

$$|11\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

忽略粒子间的相互作用，求出此体系基态归一化波函数与相应的能量本征值.

④ 计及粒子间的相互作用，精确到微扰论的一级修正，计算上一问中二费米子体系基态能量本征值. 结果保留到参数b的非零领头阶.

⑤ 比较以上计算中，费米子与玻色子基态能量一级修正的大小. 然后，请从基本原理角度论证结果为何如此.

解：

① 对于自旋为零的二玻色子构成的体系，其基态波函数为：

$$\phi_B^{(0)}(x_1, x_2) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right), \quad 0 \le x_1,\ x_2 \le a$$

体系的基态能量为：

$$E_B^{(0)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{\mu a^2}$$

体系第一激发态的波函数为：

$$\phi_B^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right], \quad 0 \le x_1,\ x_2 \le a$$

体系第一激发态能量为：

$$E_B^{(1)} = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

② 计及粒子之间微弱的相互作用之后，二全同玻色子体系基态能量的修正为：

$$\Delta E_B^{(0)} = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^a \mathrm{d}x_2 V(x_1, x_2)\left|\psi_B^{(0)}(x_1, x_2)\right|^2 \approx 3V_0\frac{b}{a}$$

而第一激发态能量的修正为：

$$\Delta E_B^{(1)} = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^a \mathrm{d}x_2 V(x_1, x_2) \left|\psi_B^{(1)}(x_1, x_2)\right|^2 \approx 4V_0 \frac{b}{a}$$

③ 对于由两个旋量粒子构成的全同费米子体系，其基态波函数的空间因子应关于二粒子交换反对称：

$$\phi_F^{(0)}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right], \quad 0 \le x_1,\ x_2 \le a$$

体系的基态能量为：

$$E_F^{(0)} = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

④ 计及二粒子之间的相互作用后，二全同费米子体系基态能量的修正为：

$$\Delta E_F^{(0)} = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^a \mathrm{d}x_2 V(x_1, x_2) \left|\psi_F^{(0)}(x_1, x_2)\right|^2 \approx V_0 \frac{5\pi^2 b^3}{3a^3}$$

⑤ 因为$0 < \dfrac{b}{a} \ll 1$，我们看到：

$$\Delta E_F^{(0)} \ll \Delta E_B^{(0)}$$

这是因为存在泡利不相容原理，二全同费米子不能占据空间同一位置. 所以，二费米子之间的短程相互作用对能级的修正并不重要.