中国科学技术大学　2021 年 1 月

2020秋广义相对论期末考试

注意事项:

1. 本次考试为开卷考试;
2. 本文档根据评课社区回忆内容结合课程进行 AI 生成，并非真题，模型: `Gemini 3`;
3. 题目中标记为 ***[EX]*** 的部分改编自课程讲义中的作业题.

解答题

1. 在狭义相对论的闵可夫斯基空间（Minkowski Spacetime）中，麦克斯韦方程组（Maxwell Equations）可以写为协变形式.

   （1）定义电磁场张量 $F^{\mu\nu}$. 已知电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，写出 $F^{\mu\nu}$ 的分量形式（矩阵形式）.

   （2）**[EX]** 证明非齐次麦克斯韦方程组 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi \boldsymbol{J}$ 可以统一写为:

   $$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -4\pi J^\beta,$$

   其中 $J^\beta = (\rho, \boldsymbol{J})$ 是四维电流密度矢量.

   根据广义协变原理（Principle of General Covariance），将上述麦克斯韦方程组推广到一般的黎曼空间（Riemannian Space）.

   （3）写出黎曼空间中推广后的麦克斯韦方程组形式.

   （4）说明在黎曼空间中，普通的偏导数 ∂_μ 应替换为什么数学运算? 并写出该运算对二阶张量 $F^{\mu\nu}$ 的具体表达式（利用克里斯托费尔符号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$）.

2. 考虑一个由地球和太阳组成的双星系统（视为质点），假设它们绕共同质心作圆周运动. 根据广义相对论，该系统会通过引力波辐射损失能量.

（1）**[EX]** 写出双星系统的四极矩引力辐射功率公式（Quadrupole Formula）.（提示：$P=-\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dfrac{32}{5}\dfrac{G^4}{c^5}\cdots$）

（2）由于能量损失，地球绕太阳的轨道半径 r 和公转周期 T 会随时间变化. 利用牛顿力学中的能量-轨道半径关系 $E=-\dfrac{GMm}{2r}$ 和开普勒第三定律，推导轨道周期变化率 $\dot{T}$ 与 T 的关系式.

（3）**[EX]** 假设初始时刻 $t=0$ 时周期为 T_0，计算周期 $T(t)$ 随时间 t 的函数关系. 说明该系统会导致周期减小还是增大?

3. 在史瓦西度规（Schwarzschild Metric）描述的球对称引力场中，考虑一个有质量粒子的运动. 度规形式为:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

（1）写出粒子在赤道平面（$\theta = \pi/2$）运动的有效势能（Effective Potential）$V_{\text{eff}}(r)$ 的表达式.

（2）**[EX]** 证明对于有质量粒子，存在一个**最内稳定圆轨道**（Innermost Stable Circular Orbit, ISCO）. 计算该轨道的半径 r_{ISCO}（用中心天体质量 M 表示）.

（3）计算粒子在 ISCO 轨道上的单位质量引力势能（或具体的能量 E）.

4. 本题考察中子星和白矮星的相关物理性质.

（1）**[EX]** 对于由简并费米子气体（如电子或中子）组成的致密星体，计算其费米能（Fermi Energy）E_F 与粒子数密度 n 的关系.（分相对论性和非相对论性两种情况讨论）.

（2）**[EX]** 估算中子星的**最小自转周期**. 假设中子星质量 $M \approx 1.4M_{\odot}$, 半径 $R \approx 10\text{km}$, 利用牛顿引力下的质量脱落极限（Keplerian limit）进行估算.

（3）**[EX]** 中子星的非球对称性（椭率 ϵ）会导致引力波辐射. 若已知某中子星的自转频率为 f，距离地球为 d，且观测到的引力波特征应变振幅为 h_0，请根据四极辐射公式推导计算该中子星椭率 ϵ 的表达式.