

中国科学技术大学物理学院

2018~2019 学年第 2 学期考试试卷

课程名称: 热力学与统计物理 (A)

课程代码: _____

开课院系: 物理学院考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						
阅卷人						

【答题中可能用到的数学关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}; \quad \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = \Gamma(p+1);$$

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \ln[1 \pm \lambda e^{-x}] dx = \pm \Gamma(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} (\mp \lambda)^n;$$

其中 $\Gamma(p)$ 是欧拉 Γ 函数。 $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$; 当 p 是整数时 $\Gamma(p+1) = p!$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 。物理常数: 电子电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ 库仑; Boltzmann 常数 $k_B = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K。】

一、考虑恒星里的中性碳原子。碳原子的电子基态能量为零, 简并度为 9; 第一激发态能量 $\varepsilon = 0.82$ eV, 简并度为 5。更高能级的能量太大, 可以忽略不计。恒星里的碳原子粒子数密度比较小, 相互作用以及全同性不重要。

1. 求恒星的温度为 T 时, 碳原子的单粒子配分函数。
2. 求温度为 T 时处于基态和第一激发态时的碳原子数目之比。

3. 通过光谱测量，发现某个恒星有 10% 的碳原子处于第一激发态，求该恒星的温度。

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_l \omega_l e^{-\beta \omega_l} = 9 + 5e^{-\beta \varepsilon} \\
 \frac{a_1}{a_0} &= \frac{5}{9} e^{-\beta \varepsilon} \\
 \frac{\varepsilon}{k_B T} &= -\ln \frac{9a_1}{5a_0} \\
 T &= -\frac{\varepsilon}{k_B \ln(9a_1/5a_0)} = 5.5 \times 10^3 \text{ K}
 \end{aligned}$$

二、 N 个质量为 m 的原子处于约束势 $V(\mathbf{r}) = a|\mathbf{r}|$ 中，其中 \mathbf{r} 是原子位置， $a > 0$ 是约束强度。不考虑原子之间的相互作用。

1. 求温度为 T 时单粒子配分函数。
2. 求温度为 T 时的内能和热容。
3. 绝热地把约束强度 a 减低到 a' ，求末态的最低温度 T' 。

•

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r}) \\
 z &= \int e^{-\beta \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \frac{d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p}}{h^3} \\
 &= \frac{(4\pi)^2}{h^3} \int e^{-\beta p^2/(2m)} p^2 dp \int e^{-\beta a r} r^2 dr \\
 &= \frac{(4\pi)^2}{h^3} (2mk_B T)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{a}\right)^3 \int e^{-p^2} p^2 dp \int e^{-r} r^2 dr \\
 &= \frac{24\pi}{a^3} \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_B T)^{9/2}
 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
 U &= Nk_B T^2 \frac{\partial \ln z}{\partial T} = \frac{9Nk_B T}{2} \\
 C &= \frac{9Nk_B}{2}
 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
 S &= Nk_B \ln z + \frac{U}{T} - k_B \ln N! \\
 &= Nk_B \ln \left[\frac{24\pi}{a^3} \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_B T)^{9/2} \right] + \frac{9Nk_B}{2} - k_B \ln N! \\
 &= Nk_B \ln \left[\frac{24\pi}{a'^3} \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_B T')^{9/2} \right] + \frac{9Nk_B}{2} - k_B \ln N! \\
 \frac{T'}{T} &= \left(\frac{a'}{a}\right)^{2/3}
 \end{aligned}$$

三、处于磁场 B 中自旋为 1 的玻色子能量为 $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu_B B s$, 其中 m 是粒子质量, μ_B 是 Bohr 磁矩, s 是自旋量子数, 可能取值为 $0, \pm 1$ 。假设粒子数密度为 n , 且粒子间的相互作用很弱。

1. 求高温下单位体积内磁矩 $\bar{M} = n\mu\langle s \rangle$ 和线性磁化率 $\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\bar{M}}{B}$ 。
2. 外磁场比较小的情况下 ($\mu_B B \ll k_B T$) 发生玻色-爱因斯坦凝聚的温度 T_c 。
3. 求低温下 ($T < T_c$) 的单位体积磁矩。

•

$$\begin{aligned}\mu &\leq -\mu_B B \\ \lambda_s &= e^{-\beta(-s\mu_B B - \mu)} = e^{\beta(s\mu_B B + \mu)} = \lambda e^{\beta s \mu_B B} \leq 1 \\ \ln \Xi &= - \sum_s \ln[1 - e^{-\beta[\varepsilon_s(\mathbf{p}) - \mu]}] \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} - \ln[1 - \lambda_1] \\ &= - \frac{4\pi(2m)^{3/2} V}{h^3} \int \sum_s \ln[1 - \lambda_s e^{-\beta\varepsilon}] \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon - \ln[1 - \lambda_1] \\ &= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_s F_{5/2}(\lambda_s) - \ln[1 - \lambda_1]\end{aligned}$$

$$F_\nu(\lambda) = \sum_l \frac{\lambda^l}{l^\nu}$$

高温时 $\lambda_s \ll 1$,

$$\begin{aligned}\ln \Xi &= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_s F_{5/2}(\lambda_s) \simeq V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_s \lambda_s \\ &= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{\beta\mu} [1 + 2 \cosh \beta \mu_B B] \\ N &= \lambda \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \lambda} = V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_s F_{3/2}(\lambda_s) \\ &\simeq V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \sum_s e^{\beta\mu + \beta \mu_B B s} \\ &= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{\beta\mu} [1 + 2 \cosh \beta \mu_B B] \\ M &= \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta \mu_B B} = \frac{N}{V} \frac{2 \sinh(\beta \mu_B B)}{1 + 2 \cosh(\beta \mu_B B)} \simeq \frac{2N}{3V} \frac{\mu_B B}{k_B T} \\ \chi &= \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{2N}{3V} \frac{\mu_B}{k_B T}\end{aligned}$$

- 磁场很弱时发生 BEC, $\lambda_s \simeq 1$,

$$\begin{aligned}N &= V \left(\frac{2\pi m k_B T_c}{h^2} \right)^{3/2} 3F_{3/2}(1) \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left[\frac{n}{3F_{3/2}(1)} \right]^{2/3}\end{aligned}$$

- 发生 BEC 后, 处于自旋 s 激发态上的粒子数密度为

$$\begin{aligned} n_{s,ex} &\simeq \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(1) \\ &= \left(\frac{2\pi m k_B T_c}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \\ &= \frac{n}{3} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

处于 $s = 1$ 基态上的粒子数密度

$$n_1 = n - \sum_s n_{s,ex} = n [1 - (T/T_c)^{3/2}]$$

由于处在激发态上的三种粒子数近乎相同, 对磁矩贡献为零。只有处于 $s = 1$ 基态上的粒子对磁矩有贡献, 因此磁矩密度为

$$M = n_1 \mu_B = n \mu_B [1 - (T/T_c)^{3/2}]$$

四、 N 个无相互作用的自旋为 $1/2$ 的费米子处在一个截面积为 A , 高度为 L 的柱形容器里。考虑重力场的作用, 动量为 \mathbf{p} 位置在 \mathbf{r} 的粒子能量为 $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + mgz$, 其中 m 为粒子质量, g 为重力加速度, $0 < z < L$ 。

1. 求费米能 ε_F , 保留到 mgL 的最低非零项。
2. 求零温下的内能。
3. 求粒子数密度和高度 z 的关系 $n(z)$ 。

•

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= mgz + \mathbf{p}^2/2m \\ N &= 2 \int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \frac{d^3r d^3p}{h^3} \\ &= \frac{4\pi A (2m)^{3/2}}{mgh^3} \int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_p} d\varepsilon_p \sqrt{\varepsilon_p} \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon_r - \varepsilon_p) \\ &= \frac{8\pi A (2m)^{3/2}}{3mgh^3} \int_0^{mgL} d\varepsilon_r (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} \\ &= \frac{16\pi A (2m)^{3/2}}{15mgh^3} \left[\varepsilon_F^{5/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{5/2} \right] \\ &= \frac{16\pi (2m)^{3/2}}{15mgh^3} \varepsilon_F^{5/2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{5}{2} \frac{mgL}{\varepsilon_F} + \frac{15}{8} \frac{(mgL)^2}{\varepsilon_F^2} + \dots \right] \right\} \\ &= \frac{8\pi V (2m)^{3/2}}{3h^3} \varepsilon_F^{3/2} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{mgL}{\varepsilon_F} \right] \\ \varepsilon_F^0 &= \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \\ \varepsilon_F^0 &= \varepsilon_F \left[1 - \frac{3mgL}{4\varepsilon_F} \right]^{2/3} \simeq \varepsilon_F^0 \left[1 + \frac{\Delta\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0} \right] \left[1 - \frac{mgL}{2\varepsilon_F^0} \right] \\ \varepsilon_F &= \varepsilon_F^0 + mgL/2 \end{aligned}$$

• 内能

$$\begin{aligned}
U &= 2 \int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d^3r d^3p}{h^3} \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3} \int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_F - \varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_p} (\varepsilon_r + \varepsilon_p) \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3} \int_0^{mgL} d\varepsilon_r \left[\frac{2}{3} \varepsilon_r (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} + \frac{2}{5} (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{5/2} \right] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3} \int_0^{mgL} d\varepsilon_r \left[\varepsilon_F (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} - \frac{2}{5} (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{5/2} \right] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3} \left\{ \frac{2}{5} \varepsilon_F [\varepsilon_F^{5/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{5/2}] - \frac{4}{35} [\varepsilon_F^{7/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{7/2}] \right\} \\
&\simeq \frac{16\pi A(2m)^{3/2}}{15mgh^3} \varepsilon_F^{7/2} \left\{ \frac{5}{2} \frac{mgL}{\varepsilon_F} - \frac{15(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2} - \frac{2}{7} \left[\frac{7mgL}{2\varepsilon_F} - \frac{35(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2} \right] \right\} \\
&= \frac{16\pi V(2m)^{3/2}}{15h^3} \varepsilon_F^{5/2} \left[\frac{3}{2} - \frac{5mgL}{8\varepsilon_F} \right] = \frac{3N\varepsilon_F^0}{5} \left(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0} \right)^{5/2} \left[1 - \frac{5}{12} \frac{mgL}{\varepsilon_F^0} \right] \\
&\simeq \frac{3}{5} N\varepsilon_F^0 + \frac{NmgL}{2}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
n(z) &= 2 \int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(z, \mathbf{p})] d^3p / h^3 \\
&= \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int \Theta(\varepsilon_F - mgz - \varepsilon_p) \varepsilon_p^{1/2} d\varepsilon_p \\
&= \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} (\varepsilon_F - mgz)^{3/2} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} (\varepsilon_F^0)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_F - mgz}{\varepsilon_F^0} \right)^{3/2} \\
&\simeq \frac{N}{V} \left[1 + \frac{mg(L/2 - z)}{\varepsilon_F^0} \right]^{3/2} \\
&\simeq n \left[1 + \frac{3mg(L/2 - z)}{2\varepsilon_F^0} \right]
\end{aligned}$$

五、用如下简化模型考虑 DNA。一条 DNA 由 N 对碱基组成，它只能从一头打开，即只有前面的 $p-1$ 个碱基对相继打开后，第 p 个才能打开。碱基对只能以一种方式结合在一起，此时能量为零；打开一个碱基对需要消耗能量 ε (> 0)，打开后每个碱基可能处于 G ($G > 1$) 个不同的状态。

1. 求打开 p 个碱基对时需要的能量 E_p 和简并度 Ω_p 。
2. 求温度为 T 时，DNA 的正则配分函数。
3. 求打开的碱基对的平均个数 \bar{p} 和涨落。
4. 在热力学极限下，即 $N \rightarrow \infty$ ，体系能否发生相变？如果可以发生相变，求发生相变的温度 T_c 和相变潜热。

$$E_p = p\varepsilon$$

$$\Omega_p = G^{2p}$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_p \Omega_p e^{-\beta E_p} = \sum_{p=0}^N G^{2p} e^{-\beta p\varepsilon} = \sum_{p=0}^N \lambda^p & \lambda &= G^2 e^{-\beta\varepsilon} \\ &= \frac{1 - \lambda^{N+1}}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{Z} \sum_{p=0}^N p \lambda^p = \frac{1}{Z} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{p=0}^N \lambda^p \\ &= \frac{1}{Z} \lambda \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \lambda} \\ &= (N+1) \frac{\lambda^{N+1}}{\lambda^{N+1} - 1} - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ \overline{p^2} &= \frac{1}{Z} \sum_{p=0}^N p^2 \lambda^p = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial (\ln \lambda)^2} \\ &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial (\ln \lambda)^2} + \bar{p}^2 \\ \Delta p^2 &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial (\ln \lambda)^2} = \lambda \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} \\ &= -(N+1)^2 \frac{\lambda^{N+1}}{(\lambda^{N+1} - 1)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\bar{p} = \begin{cases} N - 1/(\lambda - 1) \simeq N & \lambda > 1 \\ \lambda/(1 - \lambda) \simeq 0 & \lambda < 1 \end{cases}$$

因此相变温度在 $1 = \lambda_c = G^2 e^{-\varepsilon/(k_B T_c)}$, $T_c = \frac{\varepsilon}{2k_B \ln G}$ 。

$$\begin{aligned} S/k_B &= \ln Z + \beta U = \ln Z + \beta \bar{p} \varepsilon \\ &= \ln \frac{1 - \lambda^{N+1}}{1 - \lambda} + \beta \varepsilon \left[(N+1) \frac{\lambda^{N+1}}{\lambda^{N+1} - 1} - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right] \\ &= \begin{cases} N \ln \lambda + N \beta \varepsilon = 2N \ln G & \lambda > 1 \\ 0 & \lambda < 1 \end{cases} \\ L = T \Delta S &= 2N k_B T_c \ln G = N \varepsilon \end{aligned}$$