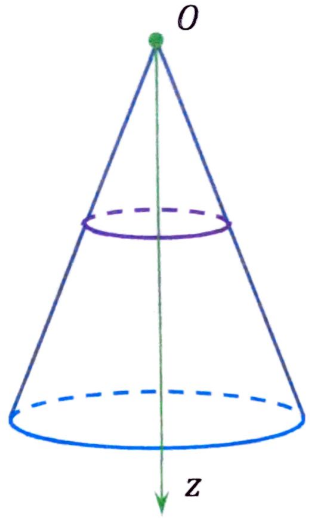
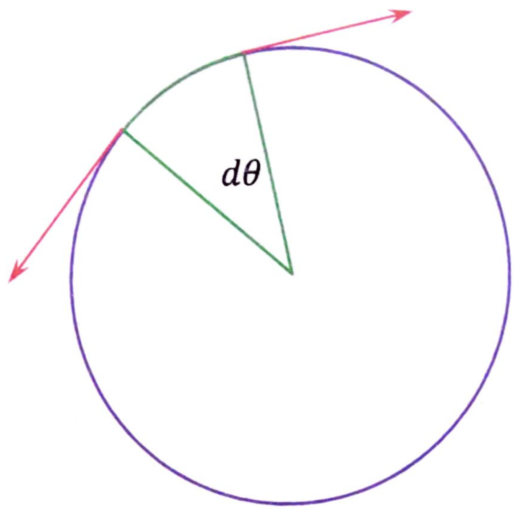
一、　(20%) 弹性圈的自然长度为$l_0$，劲度系数为$k$，质量为$m$，水平地套在垂直放置的光滑锥面上，锥顶朝上，锥顶角为$2\alpha$。利用虚功原理，求在平衡时圆锥顶点与弹性圈所在平面的距离。




解法 1：势能

$$V = -mgz + \frac{1}{2}k(2\pi z\tan\alpha - l)^2 \quad 10$$

$$\delta V = \{-mg + k(2\pi z\tan\alpha - l)2\pi\tan\alpha\}\delta z = 0 \quad 8$$

$$2\pi z\tan\alpha = \frac{mg}{2\pi k\tan\alpha} + l \quad 2$$

解法 2：如图，取一小段橡皮绳微元来分析。这段绳受到三个主动力的作用。其中有两个主动力为弹性张力，其方向在水平面内，大小为$k(2\pi z\tan\alpha - l)$；这两个力的合力为$2\times k(2\pi z\tan\alpha - l)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{d\theta}{2}\right) = k(2\pi z\tan\alpha - l)d\theta$,(3) 方向在水平面内，指向橡皮圈的圆心。另一个主动力是重力，垂直向下，大小为$\frac{m}{2\pi}d\theta g$。(2)　5

设橡皮绳微元沿侧面向下发生虚位移，其z分量为$\delta z$,(2) 水平分量为$\delta z\tan\alpha$,(3)　5
由虚功原理

$$\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad 4$$

$$-k(2\pi z\tan\alpha - l)d\theta\cdot\delta z\tan\alpha + \frac{m}{2\pi}d\theta g\cdot\delta z = 0 \quad 4$$

$$-k(2\pi z\tan\alpha - l)\tan\alpha + \frac{mg}{2\pi} = 0$$

$$2\pi z\tan\alpha = \frac{mg}{2\pi k\tan\alpha} + l \quad 2$$

笔误扣1分　每个式子笔误限1处

二、 （20 分）两个质点构成的系统拉氏量为

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

（1）证明伽利略推动

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{v}_0 t$$

是准对称变换，其中$\vec{v}_0$是常数。

（2）求此变换对应的诺特守恒量。

解：

（1）变换为

$$t' = t \quad (1)$$
$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{v}_0 t \quad (2)$$
$$\dot{\vec{r}}_i' = \dot{\vec{r}}_i + \vec{v}_0 \quad (2)$$

5

得

$$L'dt' = \left\{\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2 - V(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')\right\}dt'$$
$$= \left\{\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{r}}_1 + \vec{\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{r}}_1 + \vec{\epsilon}\right)^2 - V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right\}dt \quad (3)$$
$$= Ldt + \left(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\vec{\epsilon}dt + O(\epsilon^2) \quad (2)$$
$$= Ldt + d\{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)\cdot\vec{\epsilon}\} + O(\epsilon^2)$$

5

跳步等笔误扣1分

所以是准对称变换。

（2）由

$$\Delta t = 0, \quad (1) \qquad \Delta\vec{r}_i = \vec{\epsilon}t, \quad (1) \qquad \Delta\varphi = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)\cdot\vec{\epsilon} \quad (1)$$

5

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i} = m_i\dot{\vec{r}}_i(i\text{不求和}) \quad (2)$$

2

$$\underline{-H\Delta t + \vec{p}_i\cdot\Delta\vec{r}_i - \Delta\varphi} = \left(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\vec{\epsilon}t - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)\cdot\vec{\epsilon}$$

守恒量为

$$(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2)t - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = M(\vec{v}_C t - \vec{r}_c) = M\vec{r}_c(0)$$

3

笔误扣1分

每个式子笔误限1处

三、　　（20 分）自聚焦光线具有轴对称的折射率

$$n = n_0\sqrt{1-\alpha^2 r}$$

柱坐标$(r,\theta,z)$中，$z$为光纤轴向坐标，$r$为点到光纤中轴的距离。

设在光纤中传播的光线轨迹为$r=r(z),\theta=\theta(z)$。利用费马原理写出相应的拉氏量和拉氏方程。

解：光程

$$S[r,\theta]=\int_{z_1}^{z_2} n_0\sqrt{1-\alpha^2 r}\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}\,dz \qquad (5)$$

拉氏量为

$$L=n_0\sqrt{(1-\alpha^2 r)(1+r'^2+r^2\theta'^2)} \qquad (10)$$

拉氏方程

$$\frac{d}{dz}\frac{r'\sqrt{1-\alpha^2 r}}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}+\frac{\alpha^2(1+r'^2)+(3\alpha^2 r^2-2r)\theta'^2}{2\sqrt{(1-\alpha^2 r)(1+r'^2+r^2\theta'^2)}}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dz}\left(r^2\theta'\sqrt{\frac{1-\alpha^2 r}{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\right)=0 \qquad (4)$$

or $\frac{d}{dz}\frac{r'\sqrt{1-\alpha^2 r}}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}-\left[-\frac{\alpha^2\cdot\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}{2\sqrt{1-\alpha^2 r}}+\frac{\sqrt{1-\alpha^2 r}\,\theta'^2\cdot r}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\right]=0$

仅写Lagrange方程形式给2分，每个方程写对给4分 / 混一个方程正确给6分

注①~~没有把拉氏方程具体表达式写出来，扣一半分(5分)~~

$$\frac{r''\sqrt{1-\alpha^2 r}}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}+\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\cdot\frac{(\frac{1}{2})\cdot(-\alpha^2)r'}{\sqrt{1-\alpha^2 r}}+\frac{r'\sqrt{1-\alpha^2 r}\,(2r'r''+2rr'\theta'^2+2r^2\theta'\theta'')\cdot(-\frac{1}{2})}{(1+r'^2+r^2\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\alpha^2 r}{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\cdot(2rr'\theta'+r^2\theta'')+\frac{r^2\theta'}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\cdot\frac{(\frac{-\alpha^2}{2})r'}{\sqrt{1-\alpha^2 r}}+r^2\theta'\sqrt{1-\alpha^2 r}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot(2r'r''+2rr'\theta'^2+2r^2\theta'\theta'')}{(1+r'^2+r^2\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

② 若写成参数形式拉氏量给8分

四、　　（20 分）在库伦势

$$V = \frac{\alpha}{r}$$

中运动的带电粒子，作平面运动，$(r, \theta)$为平面的极坐标。令广义坐标

$$u = \frac{1}{r}$$

利用莫培督原理，求粒子的轨迹$u = u(\theta)$满足的方程。

解：莫培督原理

$$0 = \delta\int_{s_1}^{s_2} ds = \delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{2m[E - V(r)]}\sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta$$

$$= \delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{2m(E - \alpha u)}\sqrt{\frac{1}{u^4}u'^2 + \frac{1}{u^2}}\,d\theta$$

$$= \delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{u^2}\sqrt{2m(E - \alpha u)}\sqrt{u'^2 + u^2}\,d\theta$$

(10)

写出拉氏方程形式 5分

共5分，

$\frac{\partial F}{\partial u'}$ 1分

$\frac{\partial F}{\partial u}$ 2分

化简 2分

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{u^2}\sqrt{E - \alpha u}\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{2}{u^3}\sqrt{E - \alpha u}\sqrt{u'^2 + u^2} + \frac{1}{2u^2}\frac{\alpha}{\sqrt{E - \alpha u}}\sqrt{u'^2 + u^2}$$

$$-\frac{1}{u}\sqrt{E - \alpha u}\frac{1}{\sqrt{u'^2 + u^2}} = 0$$

$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E - \alpha u}}{\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{E - \alpha u}\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{1}{u^2}\sqrt{E - \alpha u}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + u^2}} - \frac{u}{\sqrt{u'^2 + u^2}}\right) = 0$$

$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E - \alpha u}}{\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{E - \alpha u}\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{\sqrt{E - \alpha u}}{u^2}\left(\frac{u''}{\sqrt{u'^2 + u^2}} - \frac{u'^2(u'' + u)}{(u'^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{u}{\sqrt{u'^2 + u^2}}\right) = 0$$

$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E - \alpha u}}{\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{E - \alpha u}\sqrt{u'^2 + u^2}} + \frac{\sqrt{E - \alpha u}}{u^2}\frac{1}{(u'^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}(uu'' - 2u'^2 - u^2) = 0$$

$$4(E - \alpha u)(u'^2 + u^2) + \alpha u(u'^2 + u^2) + 2(E - \alpha u)(uu'' - 2u'^2 - u^2) = 0$$

$$2(E - \alpha u)(u'^2 + u^2) + \alpha u(u'^2 + u^2) + 2(E - \alpha u)(uu'' - u'^2) = 0$$

$$2(E - \alpha u)uu'' + \alpha uu'^2 + 2Eu^2 - \alpha u^3 = 0$$

$$2(E - \alpha u)u'' + \alpha(u'^2 + u^2) + 2(E - \alpha u)u = 0$$

$$2(E - \alpha u)u'' + \alpha u'^2 + 2Eu - \alpha u^2 = 0$$

注：如果把广义能量积分

$$J = \sqrt{2m(E - \alpha u)}\frac{1}{\sqrt{u'^2 + u^2}} = C$$

$$\frac{u'^2 + u^2}{2(E - \alpha u)} = \frac{m}{J^2}$$

先写r，后换成u：

$$\sqrt{2m(E - V)}\cdot\frac{-r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \text{const}$$

代入，则方程化简为 Binet 方程

$$u'' + u = \frac{m\alpha}{J^2}$$

注 ①写出首次积分亦视为正确；结果不正确扣5分

②写出拉氏方程的形式，但没有具体写出表达式扣5分

③仅用经典形式的莫培督原理，未作写出轨道方程，只给原理分(10)

④仅写出莫培督原理形式给2分；仅写出Lagrange方程形式给两分(2)

⑤使用广义能量，计算失误扣5分，未化简扣2

五、 （20%）考虑弦的横向振动

$$\psi=\psi(t,x),\qquad x\in[-a,a]$$

在小曲率近似下，Lagrange 密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\rho(\partial_t\psi)^2-\frac{1}{2}Y(\partial_x\psi)^2$$

设弦的两端固定，则任意时刻弦的形状可写成$(x^2-a^2)f(x)$，低频近似下可展开为

$$\psi(t,x)=q_1(t)(x^2-a^2)+q_2(t)(x^2-a^2)x$$

其中$q_1(t),q_2(t)$为展开系数，可作为描述弦振动的广义坐标。

（1） 求拉氏量$L(t,q,\dot{q})$。

（2） 写出$q_1(t),q_2(t)$满足的运动方程。

解：

（1） 10%

$$\partial_t\psi=\dot{q}_1(t)(x^2-a^2)+\dot{q}_2(t)(x^2-a^2)x$$
$$\partial_x\psi=q_1(t)\cdot 2x+q_2(t)(3x^2-a^2)$$

作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{-a}^{a}dx\mathcal{L}$$

$$\begin{aligned}
L&=\int_{-a}^{a}dx\mathcal{L}\\
&=\frac{1}{2}\rho\dot{q}_1^2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2dx+\rho\dot{q}_1\dot{q}_2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2xdx+\frac{1}{2}\rho\dot{q}_2^2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2x^2dx\\
&\quad-\frac{1}{2}Yq_1^2\int_{-a}^{a}4x^2dx-Yq_1q_2\int_{-a}^{a}2x(3x^2-a^2)dx-\frac{1}{2}Yq_2^2\int_{-a}^{a}(3x^2-a^2)^2dx\\
&=\frac{1}{2}\rho\dot{q}_1^2\cdot\frac{16a^5}{15}+\rho\dot{q}_1\dot{q}_2\cdot 0+\frac{1}{2}\rho\dot{q}_2^2\cdot\frac{16a^7}{105}-\frac{1}{2}Yq_1^2\cdot\frac{8a^3}{3}-Yq_1q_2\cdot 0-\frac{1}{2}Yq_2^2\frac{8a^5}{5}\\
&=\frac{8\rho a^5}{105}(7\dot{q}_1^2\cdot+a^2\dot{q}_2^2)-\frac{4Ya^3}{15}(5q_1^2+3a^2q_2^2)
\end{aligned}$$

$$=\frac{8}{15}\rho a^5\dot{q}_1^2+\frac{8}{105}\rho a^7\dot{q}_2^2-\frac{4}{3}Ya^3q_1^2-\frac{4}{5}a^5q_2^2$$

（2）运动方程 10%

$$2\rho a^2\ddot{q}_1+5Yq_1=0$$
$$2\rho a^2\ddot{q}_2+21Yq_2=0$$

错一个系数扣2分（拉氏量）.

没有拉氏量，写出拉氏方程不得分.

L未化简扣4分；部分化简且方程对扣2分

方程错1个系数扣2分

用场方程 $\rho\partial_t^2\psi-Y\partial_x^2\psi=0$ 推导不出，给2分.

拉氏量交叉项算错（不为0），−2. 方程多交叉项 −2.

错正负号，每个扣1分.