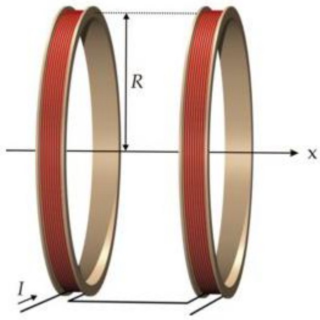
# 《电磁学》期末考试公共试题

**（50 分）**

（任意矢量 A 满足：$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$）

## 一、公共题（共 50 分）

### 1. (17 分) 磁镜




（1）一个半径为 $R$，电流为 $I$ 的电流圆环，求在轴线上的磁感应强度。（5 分）

（2）设两个线圈各有 $N$ 匝线圈，通以相同的电流为 $I$，两个线圈的半径都为 $R$. 如果两个线圈之间的距离为 $10R$，这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜，带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中，则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获？（6 分）

（3）带电粒子在磁镜中运动，如果磁感应强度为 $B$ 处的回旋半径 $a$，证明：（6 分）

$$a\sqrt{B}=\text{不变量}$$

【解】(1) 设电流环的轴线为 $x$ 轴，在圆环上取一段圆弧，则该电流元在轴线上的磁感应强度为：

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left(R^2+x^2\right)}$$

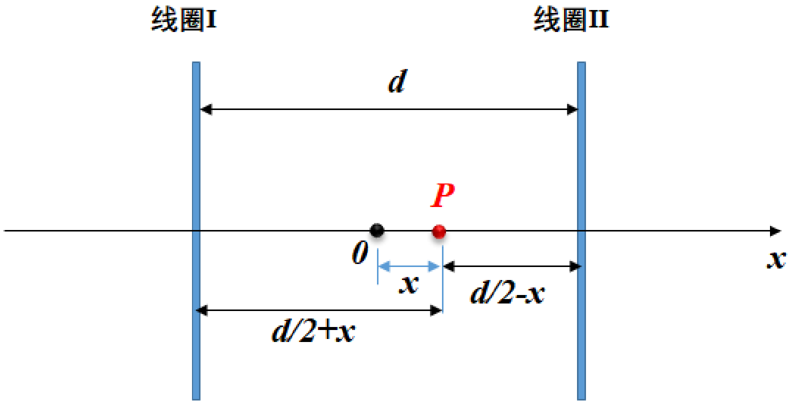
方向垂直于 $r$ 方向，整个电流环在该点叠加的磁感应强度沿 $x$ 轴方向， 所以

$$B=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left(R^2+x^2\right)}\sin\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2d\varphi}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

（2）载流 $N$ 匝圆线圈(位于坐标原点)在轴线上某点的磁感应强度为：

$$B_x=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

坐标原点取在两个线圈的中心处，假设两个线圈中心距离为 $d$， 则两组线圈叠加的磁场为：




$$B_x=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+\left(\frac{d}{2}+x\right)^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+\left(\frac{d}{2}-x\right)^2\right)^{3/2}}$$

如果两个线圈之间的距离为 *10R*，则每个线圈中心处的磁场为最大，其值为

$$B_{\max}=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+(5R+5R)^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+(5R-5R)^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(101R^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}\approx\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{1000R}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}\approx\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}$$

中心处磁场为最小， 其值为：

$$B_{\min}=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(26R^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(26R^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0NI}{\sqrt{17576}R}\approx 0.0075\frac{\mu_0NI}{R}$$

带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量，磁矩为

$$\mu=SI=\pi R^2\frac{q}{T}=\frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B}=\frac{mv^2\sin^2\theta}{2B}$$

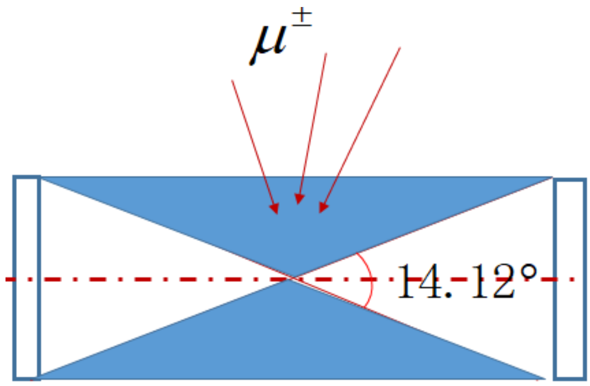
所以

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta}{B_{\min}}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{B_{\max}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}}=\sqrt{\frac{0.0075}{0.5}}=0.1228$$

$$\theta=7.06°$$

即宇宙射线中的带电粒子是以水平轴线成 14.12°的左右两个锥体之外上下两个锥体内进入该磁镜时，会被磁镜捕获。




（3）因为带电粒子在 $B$ 处的回旋半径为

$$a=\frac{mv\sin\theta}{qB}，\quad 则 a^2=\frac{m^2v^2\sin^2\theta}{q^2B^2}$$

$$\mu=\frac{\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta}{B}，\quad v^2\sin^2\theta=\frac{2\mu B}{m}，代入上式，\quad 有$$

$$a^2=\frac{m^2 2\mu B}{q^2B^2m}=\frac{2m\mu}{q^2B}$$

即：

$$a\sqrt{B}=\sqrt{\frac{2m\mu}{q^2}}=守恒量$$

因为电量，质量（非相对论）和磁矩都是不变量；所以该式是不变量。

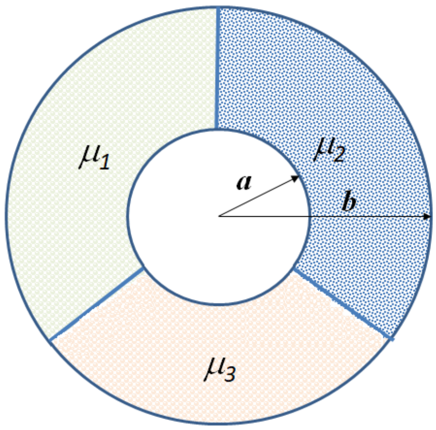
**2.（16 分）同轴电缆**

同轴电缆的内导体是半径为 $a$ 的空心圆柱，外导体是半径为 $b$ 的薄圆柱面，其厚度可以忽略不计，内、外导体间填充有绝对磁导率分别为 $\mu_1$、$\mu_2$ 和 $\mu_3$ 的三种磁介质，每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积，分界面正好沿半径方向，如图所示．设内圆柱面内沿轴线方向流有大小相等，方向相反的电流，电流面密度为 $i$；求：

（1）各区域的磁感应强度和磁场强度；（8 分）

（2）同轴电缆单位长度所储存的磁场能量；（4 分）

（3）同轴电缆单位长度的自感。（4 分）




【解】（1）由安培环路定律， 得：

$$\begin{cases} \vec{H}_0 = 0 \quad (0 < r < a) \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = \dfrac{3i2\pi a}{2\pi r}\vec{e}_\phi = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a < r < b) \\ \vec{H}_4 = 0 \qquad\qquad (r > b) \end{cases}$$

由于 $\vec{B} = \mu\vec{H}$，所以

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = 0 \quad (0 < r < a) \\ \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_1} + \dfrac{\vec{B}_2}{\mu_2} + \dfrac{\vec{B}_3}{\mu_3} = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a < r < b) \\ \vec{B}_4 = 0 \qquad\qquad (r > b) \end{cases}$$

因为同轴电缆线内外导体间的磁场沿φ，即沿圆柱体的圆周方向，在三种介质分界面上只有法向分量，由边界条件知， $B_1=B_2=B_3$，所有

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \frac{3ia}{r(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3})}\vec{e}_\phi = \frac{3\mu' ia}{r}\vec{e}_\phi, \quad (a < r < b)$$

$\vec{e}_\varphi$ 是沿圆周方向的单位矢量，按圆柱体内电流的右手螺线方向；$\dfrac{1}{\mu'} = \dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2} + \dfrac{1}{\mu_3}$.

（2）长度为 $l$ 的同轴电缆内的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{B_1^2}{\mu_1}\frac{2}{3}\pi rldr + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{B_2^2}{\mu_2}\frac{2}{3}\pi rldr + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{B_3^2}{\mu_3}\frac{2}{3}\pi rldr$$

$$= 3\pi\mu' i^2 a^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

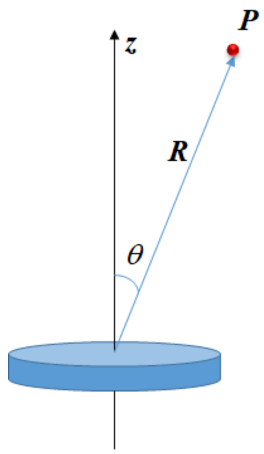
单位长度的磁能为：$\dfrac{W_m}{l} = 3\pi\mu' i^2 a^2 \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

（3）由 $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$；得到： $W_m = \dfrac{1}{2}L\left(2\pi ai\right)^2 = 2\pi^2 a^2 Li^2$

单位长度的自感为：

$$L = \frac{2W_m}{I^2 l} = \frac{W_m}{2\pi^2 a^2 i^2 l} = \frac{3\pi\mu' i^2 a^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi^2 a^2 i^2 l} = \frac{3\mu'}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**3. (17 分) “涡流”**




（1）一个半径为 $a$，非常薄（厚度为 $b$）的导体圆盘放置在 $xy$ 平面上，导体的电导率为σ，磁导率为$\mu_0$, 原点在圆盘中心，空间加上磁场为：

$\vec{B}=B_0\cos(\omega t+\varphi)\vec{e}_z$，请给出圆盘上半径为 $r$ 处的涡流密度 $j_f$.　（6 分）

(2)请求出圆盘的总磁矩，并给出远处 P 点（$r>>a$）由涡流产生的磁感应强度。(6 分）

（3）导体置于随时间变化的磁场中时，导体内部会出现“涡流”，即导体中自由电子在涡旋电场作用下形成的电流，涡旋电流又产生磁场，相当于一种“自激”效应。如果导体的电导率为σ，磁导率为$\mu_0$，当涡流达到稳恒流动时（$\nabla\cdot\vec{j}_f=0$），请证明：涡流密度 $j_f$满足以下方程：(5 分）

$$\nabla^2\vec{j}_f=\sigma\mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t}$$

解：（1）取一半径为 $r$ 的圆，根据电磁感应定律，由于涡旋电场沿圆的切线方向，大小处处相等，故

$$2\pi rE=-\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2=B_0\omega\pi r^2\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\vec{E}=\frac{B_0\omega r}{2}\sin(\omega t+\varphi)\vec{e}_\theta$$

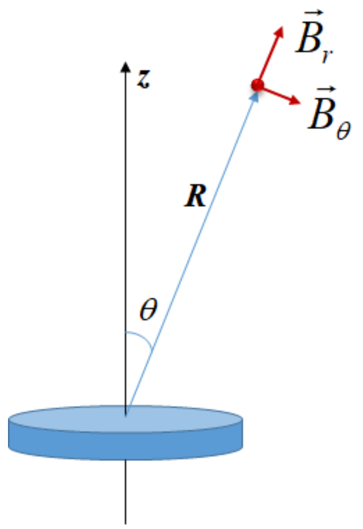
所以，有：

$$\vec{j}_f=\sigma\vec{E}=\frac{B_0\sigma\omega r}{2}\sin(\omega t+\varphi)\vec{e}_\theta$$

（2）圆盘的磁矩为：

$$dm=\pi r^2dI=\pi r^2j_fbdr=\frac{\pi B_0\sigma b\omega\sin(\omega t+\varphi)r^3dr}{2}$$

总磁矩为：




$$m=\int_0^a dm=\frac{\pi B_0\sigma b\omega\sin(\omega t+\varphi)}{2}\int_0^a r^3dr=\frac{\pi B_0\sigma b\omega a^4\sin(\omega t+\varphi)}{8}$$

$$\vec{m}=m\vec{e}_z$$

$$\begin{cases}B_r=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m_{//}}{R^3}=\dfrac{\mu_0}{16}\dfrac{B_0\sigma b\omega a^4\sin(\omega t+\varphi)}{R^3}\cos\theta\\[2ex] B_\theta=-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m_\perp}{R^3}=-\dfrac{\mu_0}{32}\dfrac{B_0\sigma b\omega a^4\sin(\omega t+\varphi)}{R^3}\sin\theta\end{cases}$$

或者总磁感应强度为：(这部分可计算，如没有计算不扣分)

$$B=\sqrt{B_r^2+B_\theta^2}=\frac{\mu_0}{32}\frac{B_0\sigma b\omega a^4\sin\left(\omega t+\varphi\right)}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

方向，与 $r$ 方向成α角度，其值为：

$$\tan\alpha=\frac{B_\theta}{B_r}=\frac{1}{2}\tan\theta$$

（3）根据电磁感应定律， 有

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

稳定的涡流满足：$\nabla\cdot\vec{j}=0$， 涡流产生的磁感应强度满足 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_f$，

根据欧姆定律， $\vec{j}_f=\sigma\vec{E}$，代入上式

$$\nabla\times\sigma\vec{E}=-\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\vec{j}_f=-\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

对该式两边用 $\nabla$ 左叉乘， 则

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{j}_f\right)=-\sigma\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{B}\right)}{\partial t}=-\sigma\mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t}$$

因为：

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{j}_f\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{j}_f\right)-\nabla^2\vec{j}_f=-\nabla^2\vec{j}_f$$

最终得：

$$\nabla^2\vec{j}_f=\sigma\mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t}$$