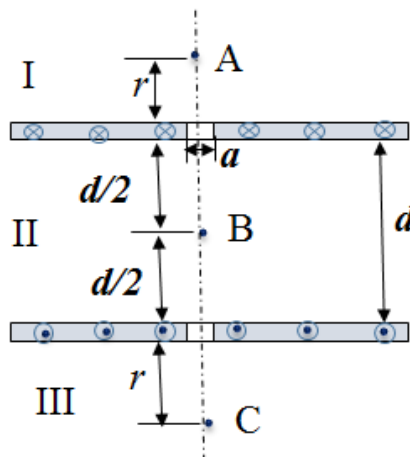
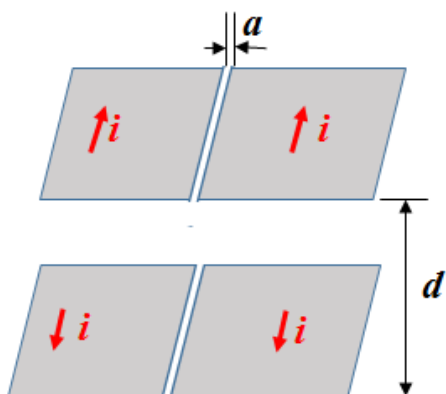


2017 年《电磁学》期末考试公共试题解答

(总分 50 分)

1. (15 分) 两个无限大载流平面间距为 d , 载有电流密度为 i , 电流方向相反, 但每块平面中间都有一个小槽, 小槽宽度为 a , 两条槽中无电流, 且距离也为 d . 求三个区域 (I, II, III) 中 A、B 和 C 三点处的磁感应强度大小与方向, 距离见图所示, 平面的厚度不计。



【解】本题可以用叠加原理求解, 把每个无电流的槽等效于两个电流方向相反, 大小为 $I=ia$ 的叠加, 结果就为无电流的槽。因此相当于整个无限大载流平面 (无槽) 面电流为 i , 和两根无限长直导线, 电流为 I , i 方向与 I 相反所产生的磁感应强度的叠加。

如图, 一个无限大载流平面的磁场可利用安培环路定理, 有

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2BL = \mu_0 iL, \quad B = \frac{\mu_0}{2} i, \quad \text{方向如图所示。}$$

两个无限大载流平面, 电流方向相反。叠加后
磁场为

I, III 区域为零;

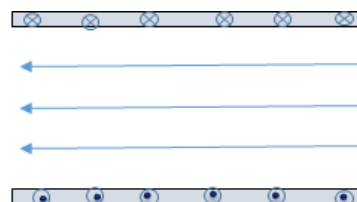
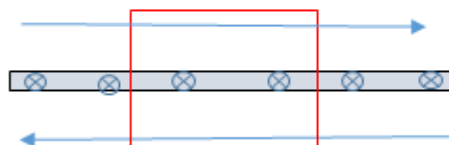
中间区域 (II) 的磁场为:

$$\vec{B} = -\mu_0 i \vec{e}_z$$

\vec{e}_z 方向水平向右为正方向。

一根无限长直导线的产生的磁场, 由安培环路定理有:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 ia$$



即：

$$B = \frac{\mu_0 ia}{2\pi r}$$

A 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

$$\begin{aligned}\vec{B}_A &= -\frac{\mu_0 ia}{2\pi r} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 ia}{2\pi(r+d)} \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 ia}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+d} \right) \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z\end{aligned}$$

B 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

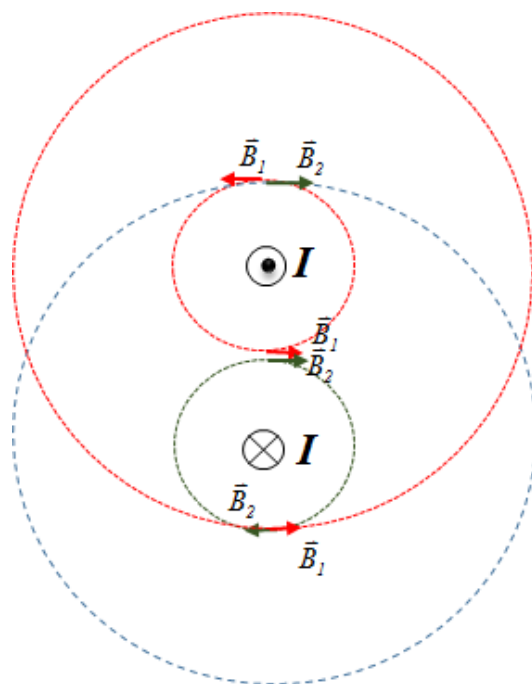
$$\vec{B}_B = \frac{\mu_0 ia}{\pi d} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 ia}{\pi d} \vec{e}_z = \frac{2\mu_0 ia}{\pi d} \vec{e}_z$$

C 点由两根无限长导线产生的磁场大小为

$$\vec{B}_C = \vec{B}_A = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z$$

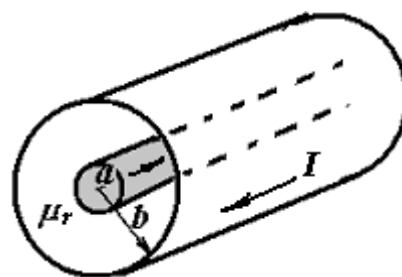
综合以上结果。得到 A,B,C 三点的磁感应强度为：

$$\begin{cases} A\text{点:} & \vec{B}_A = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z \\ B\text{点:} & \vec{B}_B = \mu_0 i \left(\frac{2a}{\pi d} - l \right) \vec{e}_z \\ C\text{点:} & \vec{B}_C = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z \end{cases}$$



2. (15 分)一同轴电缆，中心是半径为 a 的圆柱实心导线，外部是半径为 b 的导体薄圆筒，之间充满相对磁导率为 μ_r 的介质。电流从实心圆柱导线流进，从外筒流出，设内、外导线电流分布均匀，求：

- (1) 介质内外 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{M} 的分布；(6 分)
- (2) 界面处的磁化电流密度；(6 分)
- (3) 电缆单位长度的自感系数。(8 分)



解：(1) 由安培环路定理，有

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

$$\text{有: } r < a, \quad 2\pi r H_1 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2, \quad H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}, \quad M_1 = 0$$

$$a < r < b, \quad H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}, \quad M_2 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r}$$

$$r > b, \quad H_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad M_3 = 0$$

(2) 内表面, $r=a$ 处,

$$i_{m1} = \vec{n} \times (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) = -\vec{n} \times \vec{M}_2 = -(\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a} \vec{n} \times \vec{e}_l = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a} \vec{e},$$

\vec{e}_l 为电流右旋方向单位矢量, \vec{e} 为电流方向单位矢量。

外表面, $r=b$ 处

$$i_{m2} = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_3) = \vec{n} \times \vec{M}_2 = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi b} \vec{n} \times \vec{e}_l = (1 - \mu_r) \frac{I}{2\pi b} \vec{e}$$

(3) 能量密度:

$$\begin{cases} r < a, & \omega_{m1} = \frac{1}{2} B_1 H_1 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \\ a < r < b, & \omega_{m2} = \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi r^2} \\ r > b, & \omega_{m3} = 0 \end{cases}$$

磁场的能量: $W_m = \iiint_V \omega_m r d\varphi dr dz$

$$\begin{cases} W_{m1} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}, & r < a \\ W_{m2} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}, & a < r < b \\ W_{m3} = 0, & r > b \end{cases}$$

磁场能量为: $W = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = \frac{1}{2} L I^2$

所以单位长度的自感系数 L_0 为: $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \mu_r \ln \frac{b}{a} \right]$

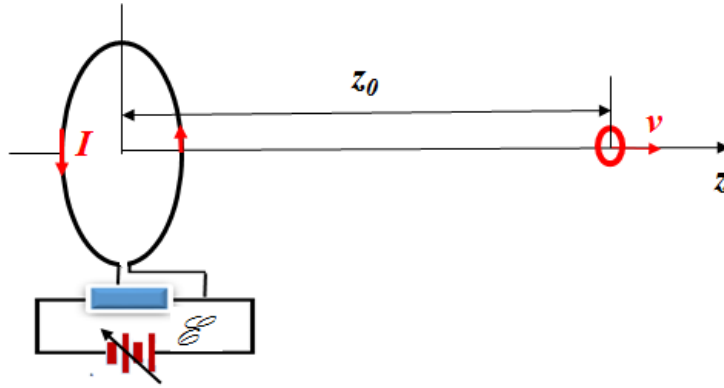
3. (20 分) 一个半径为 a 的大线圈接到一个电动势为 E 的电源上, 使之通有电流 I , 其轴上有一个无限小线圈, 两者共轴, 小线圈面积为 S , 电阻为 r .

(1) 设 $t=0$ 时刻两者距离为 z_0 , 此时小线圈沿轴运动的速度为 v , 求小线圈中感应电流大小和方向。(6 分)

(2) 求出此时小线圈受到的安培力; (提示 $\vec{F} = m \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z$, m 为小线圈的磁矩)

(4 分)

- (3) 在线圈运动过程中，为了维持大线圈中的电流 I 不变，则需要改变其电动势的值，请给出 $\Delta \mathcal{E}$ 的大小，是增加还是减少？（10 分）
(近似认为此时的 v 为常数)



解：（1）大线圈在轴线上的磁感应强度为：

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

小线圈在 $t=0$ 瞬间的磁通量为：

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

小线圈中的感应电流为：

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{S}{r} \frac{dB}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{3\mu_0}{2r} \frac{Ia^2 S v z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{即： } i(z_0) = \frac{3\mu_0 Ia^2 S v}{2r} \frac{z_0}{(a^2 + z_0^2)^{5/2}}$$

电流的方向同 I ，即按右手螺旋方向为 z 正方向。

- （2）小线圈的磁矩为： $\vec{m} = iS\vec{e}_z$ ，其所受到的梯度力为：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z = m \left(-\frac{3\mu_0 Ia^2}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{3\mu_0 Ia^2 S^2 v}{2r} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \left(-\frac{3\mu_0 Ia^2}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{e}_z \\ &= -\left(\frac{3\mu_0 Ia^2 S}{2} \right)^2 \frac{z^2 v}{r(a^2 + z^2)^5} \vec{e}_z \end{aligned}$$

z 用 z_0 代入，即为小线圈在 z_0 处受到的作用力，其方向沿 $-z$ 方向，即为阻尼力。

(3) 无源小线圈向右运动，而远离大线圈时，其贡献于后者的正向磁通量 Φ_{21} 要减少，相应的互感电动势 \mathcal{E}_{21} 为正向，即 $\mathcal{E}_{21} > 0$ ，为维持 I 不变，有源大线圈中的电动势需要改变一个 $\Delta \mathcal{E}$ ，即使 $\Delta \mathcal{E} + \mathcal{E}_{21} = 0$ ，即

$$\Delta \mathcal{E} = -\mathcal{E}_{21} = -\left(-\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right) = M \frac{di}{dt}$$

由上面(1)的磁通量结果，可以得到两线圈之间的互感系数为：

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

由(1)得到的 i ，有

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{3\mu_0 a^2 ISv}{2r} \frac{d}{dt} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r} \frac{\left(1 - \frac{5z^2}{(z^2 + a^2)}\right)}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

最终有：

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= M \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{7/2}} \\ &= \frac{3\mu_0^2 a^4 IS^2 v^2}{4r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

可见， $\Delta \mathcal{E} > 0$ 或 $\Delta \mathcal{E} < 0$ 取决于 $(a^2 - 4z^2)$ ，当

$$z > a/2 \text{ 时, } \Delta \mathcal{E} < 0$$

$$z < a/2 \text{ 时, } \Delta \mathcal{E} > 0$$