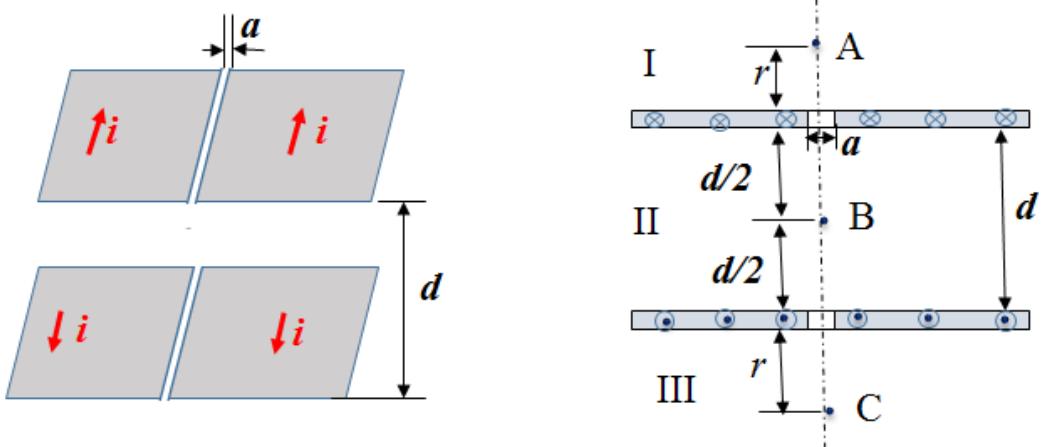


# 2017 年《电磁学》期末考试公共试题解答

(总分 50 分)

1. (15 分) 两个无限大载流平面间距为  $d$ , 载有电流密度为  $i$ , 电流方向相反, 但每块平面中间都有一个小槽, 小槽宽度为  $a$ , 两条槽中无电流, 且距离也为  $d$ . 求三个区域 (I,II,III) 中 A、B 和 C 三点处的磁感应强度大小与方向, 距离见图所示, 平面的厚度不计。

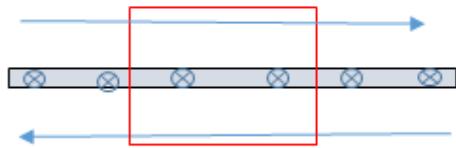


【解】本题可以用叠加原理求解, 把每个无电流的槽等效于两个电流方向相反, 大小为  $I=ia$  的叠加, 结果就为无电流的槽。因此相当于整个无限大载流平面 (无槽) 面电流为  $i$ , 和两根无限长直导线, 电流为  $I$ ,  $i$  方向与  $I$  相反所产生的磁感应强度的叠加。

如图, 一个无限大载流平面的磁场可利用安培环路定理, 有

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$2BL = \mu_0 iL, B = \frac{\mu_0}{2} i$ , 方向如图所示。

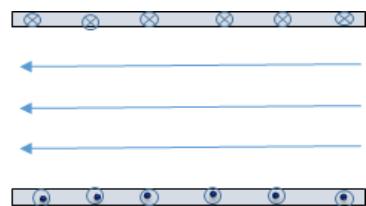


两个无限大载流平面, 电流方向相反。叠加后磁场为

I, III 区域为零;

中间区域 (II) 的磁场为:

$$\vec{B} = -\mu_0 i \vec{e}_z$$



$\vec{e}_z$  方向水平向右为正方向。

一根无限长直导线的产生的磁场, 由安培环路定理有:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i a$$

即：

$$B = \frac{\mu_0 i a}{2\pi r}$$

A 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

$$\begin{aligned}\vec{B}_A &= -\frac{\mu_0 i a}{2\pi r} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 i a}{2\pi(r+d)} \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+d} \right) \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z\end{aligned}$$

B 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

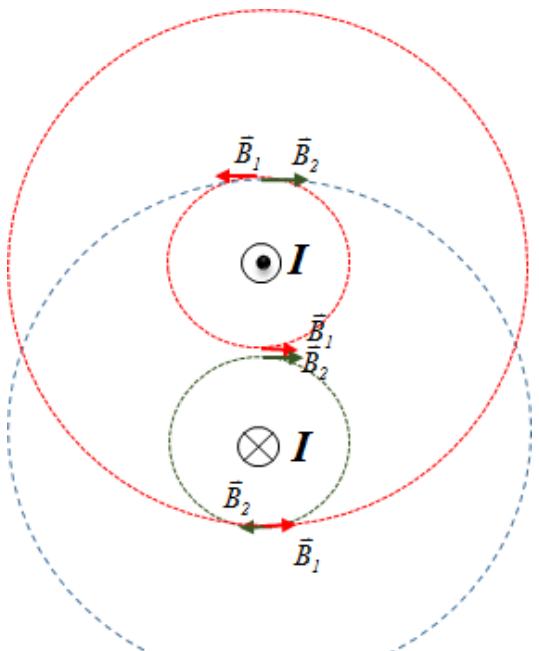
$$\vec{B}_B = \frac{\mu_0 i a}{\pi d} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 i a}{\pi d} \vec{e}_z = \frac{2\mu_0 i a}{\pi d} \vec{e}_z$$

C 点由两根无限长导线产生的磁场大小为

$$\vec{B}_C = \vec{B}_A = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z$$

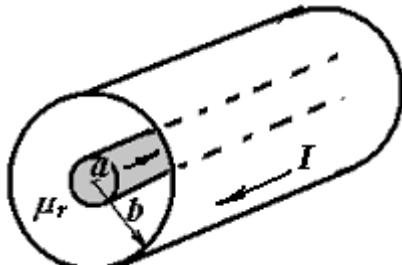
综合以上结果。 得到 A,B,C 三点的磁感应强度为：

$$\begin{cases} A \text{点: } \vec{B}_A = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z \\ B \text{点: } \vec{B}_B = \mu_0 i \left( \frac{2a}{\pi d} - 1 \right) \vec{e}_z \\ C \text{点: } \vec{B}_C = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{e}_z \end{cases}$$



2. (15 分)一同轴电缆，中心是半径为  $a$  的圆柱实心导线，外部是半径为  $b$  的导体薄圆筒，之间充满相对磁导率为  $\mu_r$  的介质。电流从实心圆柱导线流进，从外筒流出，设内、外导线电流分布均匀，求：

- (1) 介质内外  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{M}$  的分布；(6 分)
- (2) 界面处的磁化电流密度；(6 分)
- (3) 电缆单位长度的自感系数。(8 分)



解：(1) 由安培环路定理，有

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

$$\text{有: } r < a, \quad 2\pi r H_1 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2, \quad H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}, \quad M_1 = 0$$

$$a < r < b, \quad H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}, \quad M_2 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r}$$

$$r > b, \quad H_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad M_3 = 0$$

(2) 内表面,  $r=a$  处,

$$i_{m1} = \bar{n} \times (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) = -\bar{n} \times \bar{M}_2 = -(\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a} \bar{n} \times \bar{e}_I = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a} \bar{e},$$

$\bar{e}_I$  为电流右旋方向单位矢量,  $\bar{e}$  为电流方向单位矢量。

外表面,  $r=b$  处

$$i_{m2} = \bar{n} \times (\bar{M}_2 - \bar{M}_3) = \bar{n} \times \bar{M}_2 = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi b} \bar{n} \times \bar{e}_I = (1 - \mu_r) \frac{I}{2\pi b} \bar{e}$$

(3) 能量密度:

$$\begin{cases} r < a, & \omega_{m1} = \frac{1}{2} B_1 H_1 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \\ a < r < b, & \omega_{m2} = \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi r^2} \\ r > b, & \omega_{m3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{磁场的能量: } W_m = \iiint_V \omega_m r d\varphi dr dz$$

$$\begin{cases} W_{m1} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} r, & r < a \\ W_{m2} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}, & a < r < b \\ W_{m3} = 0, & r > b \end{cases}$$

$$\text{磁场能量为: } W = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\text{所以单位长度的自感系数 } L_0 \text{ 为: } L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \mu_r \ln \frac{b}{a} \right]$$

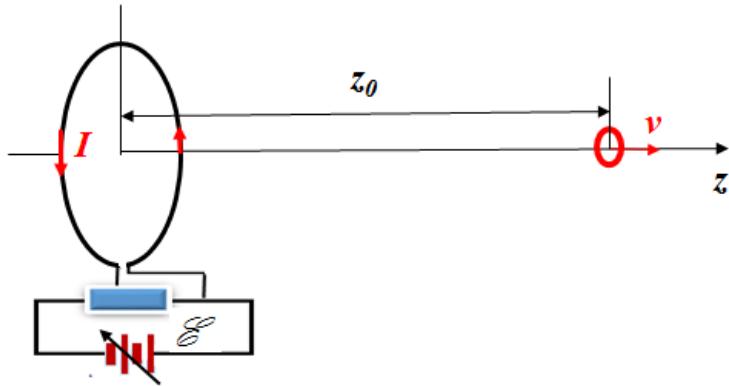
3. (20 分) 一个半径为  $a$  的大线圈接到一个电动势为  $E$  的电源上, 使之通有电流  $I$ , 其轴上有一个无限小线圈, 两者共轴, 小线圈面积为  $S$ , 电阻为  $r$ .

(1) 设  $t=0$  时刻两者距离为  $z_0$ , 此时小线圈沿轴运动的速度为  $v$ , 求小线圈中感应电流大小和方向。(6 分)

(2) 求出此时小线圈受到的安培力; (提示  $\bar{F} = m \frac{\partial B}{\partial z} \bar{e}_z$ ,  $m$  为小线圈的磁矩)

(4 分)

- (3) 在线圈运动过程中, 为了维持大线圈中的电流  $I$  不变, 则需要改变其电动势的值, 请给出  $\Delta \mathcal{E}$  的大小, 是增加还是减少? (10 分)  
(近似认为此时的  $v$  为常数)



解: (1) 大线圈在轴线上的磁感应强度为:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

小线圈在  $t=0$  瞬间的磁通量为:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

小线圈中的感应电流为:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{S}{r} \frac{dB}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{3\mu_0}{2r} \frac{Ia^2 S v z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{即: } i(z_0) = \frac{3\mu_0 I a^2 S v}{2r} \frac{z_0}{(a^2 + z_0^2)^{5/2}}$$

电流的方向同  $I$ , 即按右手螺旋方向为  $z$  正方向。

(2) 小线圈的磁矩为:  $\vec{m} = iS\vec{e}_z$ , 其所受到的梯度力为:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z = m \left( -\frac{3\mu_0 I a^2}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{e}_z \\ &= \left( \frac{3\mu_0 I a^2 S^2 v}{2r} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \left( -\frac{3\mu_0 I a^2}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{e}_z \\ &= -\left( \frac{3\mu_0 I a^2 S}{2} \right)^2 \frac{z^2 v}{r(a^2 + z^2)^5} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$z$  用  $z_0$  代入, 即为小线圈在  $z_0$  处受到的作用力, 其方向沿  $-z$  方向, 即为阻尼力。

(3) 无源小线圈向右运动, 而远离大线圈时, 其贡献于后者的正向磁通量  $\Phi_{21}$  要减少, 相应的互感电动势  $\mathcal{E}_{21}$  为正向, 即  $\mathcal{E}_{21} > 0$ , 为维持  $I$  不变, 有源大线圈中的电动势需要改变一个  $\Delta \mathcal{E}$ , 即使  $\Delta \mathcal{E} + \mathcal{E}_{21} = 0$ , 即

$$\Delta \mathcal{E} = -\mathcal{E}_{21} = -\left(-\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right) = M \frac{di}{dt}$$

由上面 (1) 的磁通量结果, 可以得到两线圈之间的互感系数为:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

由 (1) 得到的  $i$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{3\mu_0 a^2 I S v}{2r} \frac{d}{dt} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 a^2 I S v^2}{2r} \frac{\left(1 - \frac{5z^2}{(z^2 + a^2)}\right)}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3\mu_0 a^2 I S v^2}{2r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

最终有:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= M \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 S}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{3\mu_0 a^2 I S v^2}{2r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{7/2}} \\ &= \frac{3\mu_0^2 a^4 I S^2 v^2}{4r} \frac{(a^2 - 4z^2)}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

可见,  $\Delta \mathcal{E} > 0$  或  $\Delta \mathcal{E} < 0$  取决于  $(a^2 - 4z^2)$ , 当

$$z > a/2 \text{ 时, } \Delta \mathcal{E} < 0$$

$$z < a/2 \text{ 时, } \Delta \mathcal{E} > 0$$