中 国 科 学 技 术 大 学

2017 年秋季学期期中考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

2017 年 11 月 17 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 (Trace distance) 两个量子态, 密度矩阵分别是 ρ 和 ρ'. 定义它们的 trace distance

$$D(\rho,\rho') = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\rho'|$$

其中 $|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}$.

✍ 对于 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态, 给出 $D(\rho,\rho')$ 的具体形式.

问题 2 (不确定关系) 设量子系统的量子态为 ρ, 观测量 A 的期望值是 $\langle A\rangle = \operatorname{Tr}(A\rho)$, 方差

$$(\Delta A)^2 = \langle A - \langle A\rangle \mathbb{1}\rangle^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

对于另一个观测量 B, 类似地有 $(\Delta B)^2$. 通常说的不确定关系有如下形式

$$(\Delta A)(\Delta B) \geqslant \frac{1}{2}\big|\langle [A,B]\rangle\big|$$

这种形式的不确定关系依赖于量子态的具体形式, 故而存在一些理解上的问题. 例如, 如果系统处于 A 或 B 的某个本征态 (在有限维空间中这是可能的), 那么上述不等式的两端均为零, 于是无法反映这个特定的量子态在测量 A 或测量 B 的时候表现出的不确定性.

现在不妨考虑相加形式的不确定关系, 例如

$$(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 \geqslant \text{某个下限} \tag{1}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 空间中, 设

$$A = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad B = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量.

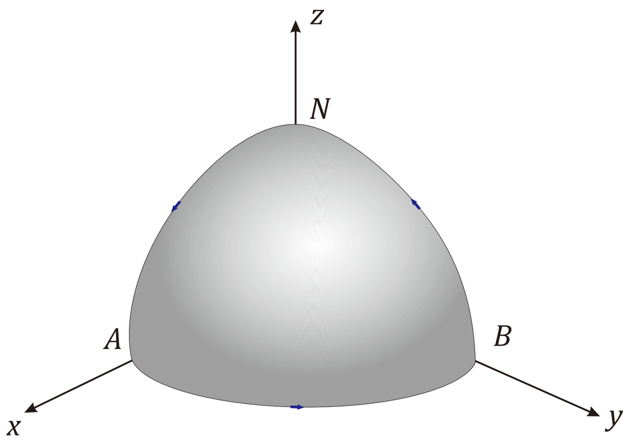
✍ 求出 (1) 式中的下限, 并且给出达到该下限的时候系统的量子态.

问题 3 (几何相) 考虑 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态 $|\psi\rangle$, 它的密度矩阵形式是 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, 可以用 Bloch 向量表示为

$$\psi = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad |\boldsymbol{r}| = 1$$

设想 ψ 经历了这样的酉演化过程 (用 Bloch 向量表示):

1. 初始时刻 $\psi_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z)$, 即初始时刻的 Bloch 向量是 z 轴上的单位向量, 指向 Bloch 球面的北极点 N.
2. 从 Bloch 球面的北极点出发, 在 xz 平面内沿经线运动到 x 轴上的 A 点, 此时量子态是
$$\psi_A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_x)$$
3. 在 Bloch 球面的赤道上运动到 y 轴上的 B 点, 此时量子态是
$$\psi_B = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_y)$$
4. 从 B 点沿 yz 平面中的经线回到出发地北极点 N. 整个过程如下图所示.



✍ 构造适当的哈密顿量, 实现这样的演化过程. 当然, 在三个不同的演化过程中, 哈密顿量是不同的.

✍ 计算每一段演化过程中的几何相, γ_{NA}, γ_{AB}, γ_{BN}.

✍ 计算整个演化过程中的几何相 γ.

问题 4 (Partial transpose) 考虑两个双值量子系统 A 和 B 构成的两体系统. 在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 空间中, 可以把两体量子纯态表示为

$$|\Psi\rangle = \cos\alpha\,|00\rangle + \sin\alpha\,|11\rangle$$

设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 考虑在描述子系统 A 的空间 $\mathbb{C}^2$ 中作转置变换 (即部分转置).

✍ 部分转置变换的结果不能描述一个真正的量子态.

问题 5 (No-cloning theorem) 为了进行量子态的克隆, 需要两个量子系统. 第一个, 记作 A 系统, 承载着我们希望克隆的量子态 $|\psi\rangle$, 它的形式是未知的. 第二个, 记作 B 系统. 我们可以将它的初态制备成某个 $|\varphi\rangle$. 假设描述 A 系统的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^A$ 和描述 B 系统的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^B$ 的维数相同, 它们是同构的.

量子克隆过程应该满足这样的要求: 对于 A 系统任意的 $|\psi\rangle$ 和 B 系统的初态 $|\varphi\rangle$, 有

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \xrightarrow{\quad U \quad} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

其中 U 是 $\mathscr{H}^A \otimes \mathscr{H}^B$ 上的酉变换.

✍ 证明不可能存在上述过程.

问题 6 两个自旋为 1/2 的粒子 A 和 B 组成两体量子系统. 空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 的基向量选择为

$$|00\rangle\,, \quad |01\rangle\,, \quad |10\rangle\,, \quad |11\rangle$$

两体系统的初态是

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\,|00\rangle + \frac{1}{2}\,|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle$$

- ✍ 在 $t = 0$ 时刻, 测量 A 的力学量 σ_z^A, 得到结果 $+1$ 的几率是多少? 在得到这个结果的前提下, 测量 B 的力学量 σ_x^B, 会得到什么结果? 几率分别是多少?
- ✍ 对处于 $|\Psi(0)\rangle$ 的两体系统, 分别测量 A 和 B 的力学量 σ_z^A 和 σ_z^B, 得到相反结果的几率是多少?
- ✍ 现在, 不考虑上述测量过程, 而是让两体系统在如下哈密顿量的支配下随时间演化,

  $$H = \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_z^B$$

  写出 t 时刻两体系统的量子态 $|\Psi(t)\rangle$. 计算在 t 时刻的期望值 $\langle\boldsymbol{\sigma}^A\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\sigma}^B\rangle$.