中 国 科 学 技 术 大 学

2016 年秋季学期期中考试试卷

考试科目: <u>量子力学</u>　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

2016 年 11 月 18 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 (Sakurai 书第一章习题 23) 将 $\mathbb{C}^3$ 空间的基向量记作 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. 两个厄密矩阵 A 和 B 在这组基上表示为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

其中 a 和 b 为实数.

- ✍ 显然 A 有简并的本征值, B 也有简并情况么?
- ✍ 证明 $[A, B] = 0$.
- ✍ 找到一组新的基向量, 使得在这组基上 A 和 B 都是对角的.

问题 2 (Trace distance) 两个量子态, 密度矩阵分别是 ρ 和 ρ'. 定义它们的 trace distance

$$D(\rho, \rho') = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} |\rho - \rho'|$$

其中 $|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}$. 对于 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态, 给出 $D(\rho, \rho')$ 的具体形式.

问题 3 (最短演化时间) 考虑自旋 1/2 粒子的量子态 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, 设

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

我们希望让 ψ 经历酉演化过程变换到另一个量子态 $\psi' = |\psi'\rangle\langle\psi'|$,

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

从实验上说, 需要设定适当的磁场和演化时间来实现这个过程. 假设磁场的强度是给定的, 但是磁场的指向可以随意选择. 粒子的哈密顿量可以表示为

$$H = \omega \sigma_n, \quad \sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

其中 ω 是定值, $\boldsymbol{n}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量, 代表磁场的指向.

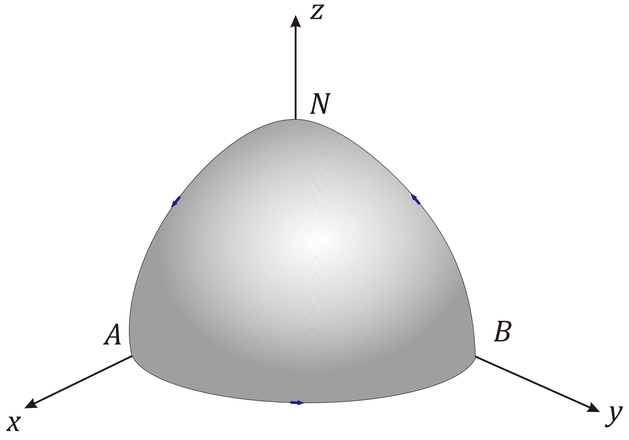
✍ 找到最佳的 $\boldsymbol{n}$, 使得从 ψ 到 ψ' 的演化时间最短.
如果你觉得写出 $\boldsymbol{n}$ 具体的数学表示很麻烦, 也可以用语言给出明确无误的描述.

问题 4 (几何相) 考虑 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态 $|\psi\rangle$, 它的密度矩阵形式是 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, 可以用 Bloch 向量表示为

$$\psi = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad |\boldsymbol{r}| = 1$$

设想 ψ 经历了这样的酉演化过程 (用 Bloch 向量表示):

1. 初始时刻 $\psi_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z)$, 即初始时刻的 Bloch 向量是 z 轴上的单位向量, 指向 Bloch 球面的北极点 N.
2. 从 Bloch 球面的北极点出发, 在 xz 平面内沿经线运动到 x 轴上的 A 点, 此时量子态是
$$\psi_A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_x)$$
3. 在 Bloch 球面的赤道上运动到 y 轴上的 B 点, 此时量子态是
$$\psi_B = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_y)$$
4. 从 B 点沿 yz 平面中的经线回到出发地北极点 N. 整个过程如下图所示.

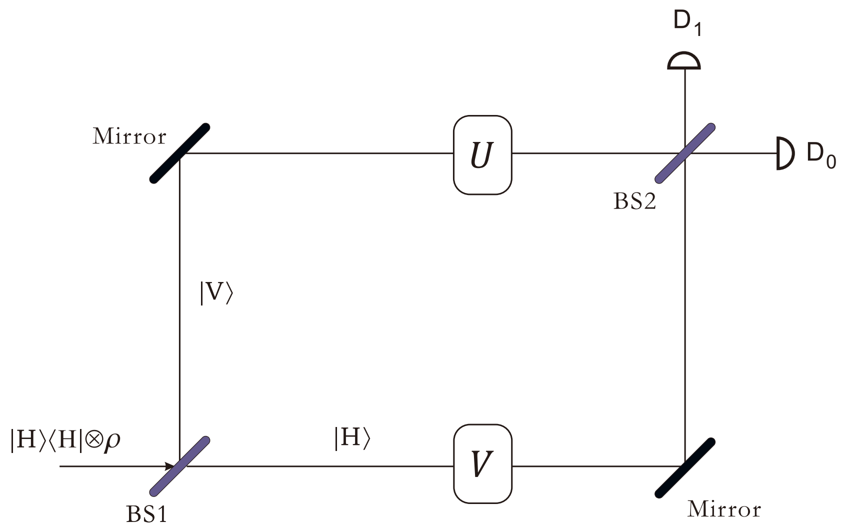


✍ 构造适当的哈密顿量, 实现这样的演化过程. 当然, 在三个不同的演化过程中, 哈密顿量是不同的.

✍ 计算每一段演化过程中的几何相, $\gamma_{NA}, \gamma_{AB}, \gamma_{BN}$.

✍ 计算整个演化过程中的几何相 γ.

问题 5 (MZ 干涉仪) 我们讨论过纯态情形下的 MZ 干涉仪. 如果双值量子态系统处于混合态 ρ, 那么输入态是 $|H\rangle\langle H| \otimes \rho$, 其中 $|H\rangle$ 表示水平方向上的空间路径, 如图所示.



图中的 U 和 V 都是针对双值量子系统的量子态的酉变换, $U, V \in \mathrm{U}(2)$. 课堂中讨论的情形是 $V = e^{\imath\chi}$.

✍ 计算在探测器 D_0 上探测到粒子的几率 p_0.

问题 6 (Dirac-Kirkwood 分布) 考虑某个量子系统, 它的状态用 $\mathbb{C}^N$ 中的密度矩阵 ρ 来描述. 该量子系统有两个力学量 A 和 B, 假定它们都是非简并的, 本征分解形式是

$$A = \sum_{j=1}^{N} a_j \left|\alpha_j\right\rangle\!\left\langle\alpha_j\right|, \quad B = \sum_{k=1}^{N} b_k \left|\beta_k\right\rangle\!\left\langle\beta_k\right|$$

考虑相继测量, 先测量 A, 后测量 B, 它们是一个测量序列中的两次测量. 事件 "先得到结果 a_j, 然后得到结果 b_k" 的几率可以表示为

$$p(a_j, b_k) = p(a_j)p(b_k|a_j) \tag{1}$$

其中 $p(a_j)$ 是测量 A 得到结果 a_j 的几率, $p(a_j) = \langle\alpha_j|\rho|\alpha_j\rangle$; $p(b_k|a_j)$ 是条件几率, 在得到结果 a_j 的前提下继续测量 B 并得到结果 b_k 的几率, 显然, $p(b_k|a_j) = |\langle\alpha_j|\beta_k\rangle|^2$.

另一方面, 我们还可以把联合几率 $p(a_j, b_k)$ 可以写为

$$p(a_j, b_k) = \mathrm{Tr}(\Pi_k^B \Pi_j^A \rho \Pi_j^A \Pi_k^B) = \mathrm{Tr}(\rho \Pi_j^A \Pi_k^B \Pi_j^A) \tag{2}$$

其中 $\Pi_j^A = |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$, $\Pi_k^B = |\beta_k\rangle\langle\beta_k|$ 是投影算子.

✍ 证明联合几率的两个表达式 (1) 和 (2) 是相等的.

上面的 $p(a_j, b_k)$ 是我们熟悉的形式. Dirac 和 Kirkwood (DK) 又定义了另一种形式的 "几率", 记作 $q(a_j, b_k)$,

$$q(a_j, b_k) = \mathrm{Tr}(\rho \Pi_j^A \Pi_k^B) \tag{3}$$

由于 $\Pi_j^A \Pi_k^B$ 不是厄密算子 (除非 A 和 B 彼此对易), 一般情况下, $q(a_j, b_k)$ 可能是一个复数, 因而不是通常意义上的几率. 虽然如此, 我们还是保留 "几率" 这个称呼. 近年来对 DK 几率有了进一步的研究并揭示了新的意义.

我们关注的问题是, 用 DK 几率表示密度矩阵. 如果选择 B 表象, 密度矩阵的矩阵元是 $\langle\beta_m|\rho|\beta_n\rangle$, 这是我们熟悉的. 现在希望看到密度矩阵的矩阵元与 DK 几率之间的联系.

✍ 用 $q(a_j, b_k)$ 表示 $\langle\beta_m|\rho|\beta_n\rangle$.