中 国 科 学 技 术 大 学

2015 年秋季学期期中考试试卷

考试科目: 量子力学 得分: ________

学生所在系: ________ 姓名: ________ 学号: ________

2015 年 11 月 18 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的两个算子或矩阵. 证明: 如果对于所有 $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$, 始终有 $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle$, 那么 $A = B$.

问题 2 两个自旋为 1/2 的粒子 A 和 B 组成两体量子系统. 空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 的基向量选择为

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |1\rangle$$

这里略去了直积符号, 例如, $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$. 而 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别对应于 σ_z 的本征值 $+1$ 和 -1. 两体系统的初态是

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- ✍ 在 $t = 0$ 时刻, 测量 A 的力学量 σ_z^A, 得到结果 $+1$ 的几率是多少? 在得到这个结果的前提下, 测量 B 的力学量 σ_x^B, 会得到什么结果? 几率分别是多少?
- ✍ 对处于 $|\Psi(0)\rangle$ 的两体系统, 分别测量 A 和 B 的力学量 σ_z^A 和 σ_z^B, 得到相反结果的几率是多少?
- ✍ 现在, 不考虑上述测量过程, 而是让两体系统在如下哈密顿量的支配下随时间演化,

  $$H = \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_z^B$$

  写出 t 时刻两体系统的量子态 $|\Psi(t)\rangle$. 计算在 t 时刻的期望值 $\langle\boldsymbol{\sigma}^A\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\sigma}^B\rangle$.

问题 3 我们知道, 条件几率是这样的: 在事件 A 出现的前提下, 事件 B 出现的几率是

$$p(B|A) = \frac{p(A,B)}{p(A)}$$

其中 $p(A)$ 是事件 A 出现的几率, $p(A,B)$ 是两个事件都出现的联合几率. 而我们可以在条件项里再多加一个事件 C, 于是前提条件变为 "事件 A 和事件 C 都出现", 在这种情况下, 出现事件 B 的几率是

$$p(B|A,C) = \frac{p(A,B|C)}{p(A|C)}$$

现在考虑对自旋 1/2 粒子的测量过程. 首先制备一个 $\mathbb{C}^2$ 上的量子态

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

这里设 α 和 β 为实数, 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

然后依次对 $|\psi\rangle$ 进行三次不同的测量: 在 t_1 时刻测量 σ_z, 在 t_2 时刻测量 $\sigma_n = \sigma_x \sin\theta + \sigma_z \cos\theta$, 在 t_3 时刻测量 σ_x. $t_1 < t_2 < t_3$.

有如下三个事件:

- C: 在第一次测量中, 观测 σ_z 得到结果 $+1$.
- B: 在第二次测量中, 观测 σ_n 得到结果 $+1$.
- A: 在第三次测量中, 观测 σ_x 得到结果 $+1$.

✍ 考虑这样的条件: "第一次和第三次测量的结果都是 $+1$", 在此条件下, 计算第二次测量的结果是 $+1$ 的几率, 即

$$p(B|C,A)$$

✍ 是否存在这样的量子态 $|??\rangle \in \mathbb{C}^2$, 对某个力学量进行观测, 可以得到上述几率?

问题 4 (No-cloning theorem) 为了进行量子态的克隆, 需要两个量子系统. 第一个, 记作 A 系统, 承载着我们希望克隆的量子态 $|\psi\rangle$, 它的形式是未知的. 第二个, 记作 B 系统. 我们可以将它的初态制备成某个 $|\varphi\rangle$. 假设描述 A 系统的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^A$ 和描述 B 系统的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^B$ 的维数相同, 它们是同构的.

量子克隆过程应该满足这样的要求: 对于 A 系统任意的 $|\psi\rangle$ 和 B 系统的初态 $|\varphi\rangle$, 有

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \xrightarrow{\ U\ } |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

其中 U 是 $\mathscr{H}^A \otimes \mathscr{H}^B$ 上的酉变换.

✍ 证明不可能存在上述过程.

问题 5 设 ρ_1 和 ρ_2 分别是两个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^A = \mathbb{C}^n$ 和 $\mathscr{H}^B = \mathbb{C}^n$ 中的量子态的密度矩阵. 我们来构造一个直和空间 $\mathscr{H} = \mathscr{H}^A \oplus \mathscr{H}^B$ 上的密度矩阵

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho_1 & X \\ X^\dagger & \frac{1}{2}\rho_2 \end{pmatrix}$$

其中 X 是 $n \times n$ 的矩阵, 添加因子 $\frac{1}{2}$ 是为了满足条件 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$. 但是, 密度矩阵应该是半正定的, 即 $\rho \geqslant 0$. 为了满足这个条件, X 不能是任意的.

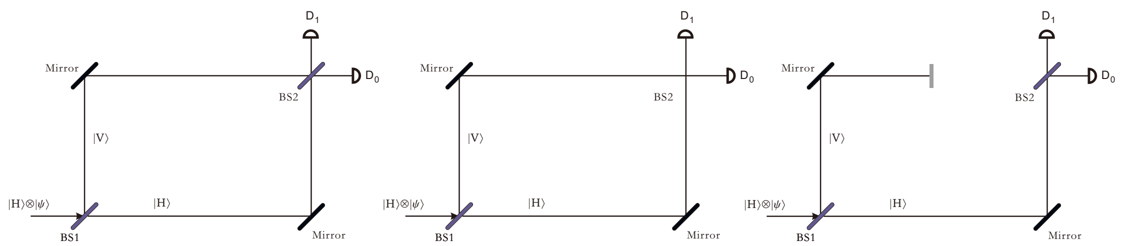
现在我们考虑一个简单的情形, 设 ρ_2 是最大混合态, 即 $\rho_2 = \frac{\mathbb{1}}{n}$.

✍ 证明如下形式的 ρ 是半正定的.

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho_1 & \frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{\rho_1}U \\ \frac{1}{2\sqrt{n}}U^\dagger\sqrt{\rho_1} & \frac{1}{2n}\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

其中的 U 是 $\mathbb{C}^n$ 上的酉变换. 而 $\sqrt{\rho_1}$ 可以这么理解: 因为 $\rho_1 \geqslant 0$, 它的本征值是非负的, 记作 λ_j. ρ_1 的对角形式记作 $\Lambda = V\rho_1 V^\dagger = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 V 是使得 ρ_1 对角化的 $\mathbb{C}^n$ 上的酉变换, 容易写出 $\sqrt{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, 于是 $\sqrt{\rho_1}$ 可以表示为 $\sqrt{\rho_1} = V^\dagger\sqrt{\Lambda}V$.

问题 6 (MZ 干涉仪) 考虑双值量子系统经过 MZ 干涉仪的过程. 其中的分束器都是 50 : 50 类型的, 也就是我们说的 Hadamard 变换.



✍ 计算在上图描述的三个不同的过程中, 探测器 D_0 和 D_1 观测到粒子的几率.

- 左图, 类似于我们课堂上讨论过的情形, 并且在干涉仪内部的两条路径没有任何对系统的变换.
- 中图, 移去了第二个分束器 BS2.
- 右图, 保留了第二个分束器, 但是, 在上方路径上设置了挡板, 使粒子不能穿过.