中 国 科 学 技 术 大 学

2014 年秋季学期期中考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

注意: 本试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为20分.

1. 考虑 n 维复 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ 上的算子, 它们具有 $n \times n$ 的矩阵形式, 证明, $\mathcal{H}$ 上的任意的算子 X 可以表示为厄密算子和反厄密算子相加的形式,

$$X = H + A,$$

其中 $H = H^\dagger$, $A = -A^\dagger$.

2. A 和 B 表示两个自旋 1/2 粒子. 二者之间的相互作用是 $H^{\rm int} = -g\hbar\,\sigma_z^A \otimes \sigma_y^B$, g 是耦合常数. 忽略两个粒子自身的哈密顿量, 整个两体系统的哈密顿量就是 $H = H^{\rm int}$, 时间演化算子是,

$$U(t) = e^{-iH^{\rm int}t/\hbar} = \begin{pmatrix} \cos gt & \sin gt & 0 & 0 \\ -\sin gt & \cos gt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos gt & -\sin gt \\ 0 & 0 & \sin gt & \cos gt \end{pmatrix}.$$

(a) 在 Heisenberg 图像中, 写出 A 粒子的力学量 σ_z^A 随时间变化的形式.

(b) 在 Heisenberg 图像中, 写出 B 粒子的力学量 σ_x^B, σ_y^B, σ_z^B 随时间变化的形式.

注 A 粒子的力学量 σ_z^A 应该表示为 $\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B$, 而 B 粒子的力学量 σ_x^B 应该表示为 $\mathbb{1}^A \otimes \sigma_x^B$, 这里的 $\mathbb{1}^A$ 和 $\mathbb{1}^B$ 分别是关于粒子 A 和粒子 B 的单位矩阵. 另外, 如果利用 Baker-Hausdorff 公式 $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$, 那么未必需要用到 $U(t)$ 的矩阵表示.

3. 两体量子系统由子系统 A 和 B 构成. 两个子系统都是自旋 1/2 粒子. 子系统 A 有两个彼此互补的观测量, 记作 A_1 和 A_2; 子系统 B 的两个彼此互补的观测量为 B_1 和 B_2. 也就是说, 设 A_1 的两个本征向量为 $|\alpha_0^{(1)}\rangle$ 和 $|\alpha_1^{(1)}\rangle$, A_2 的两个本征向量为 $|\alpha_0^{(2)}\rangle$ 和 $|\alpha_1^{(2)}\rangle$, 那么对于 $i, j \in \{0, 1\}$, 有 $|\langle\alpha_i^{(1)}\,|\,\alpha_j^{(2)}\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 观测量 B_1 和 B_2 之间的互补性有与此相同的描述. 考虑如下形式的两体系统的观测量,

$$C = A_1 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_2 + A_2 \otimes B_1 - A_2 \otimes B_2.$$

对于所有的 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 空间中量子态 $|\Psi\rangle$, 证明观测量 C 的期望值 $\langle C\rangle = \langle\Psi|C|\Psi\rangle$ 的最大值等于 $2\sqrt{2}$.

注 为了简化计算, 可以将观测量 A_i 和 B_j 选择为特殊形式, 比如 Pauli 矩阵.

4. 对某个量子系统进行测量. 制备过程提供了两个量子态, $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$. 测量方式有两种, 记作 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$. 它们都是投影测量, 即测量算子都是投影算子. 每一种测量方式都有两个观测结果, 我们可以用 1 和 2 标记这两个测量结果.

- 以 $\mathcal{M}_1$ 方式进行测量, 与测量结果 1 对应的投影算子是 $\Pi_1^{(1)}$, 与测量结果 2 对应的投影算子是 $\Pi_2^{(1)}$.
- 以 $\mathcal{M}_2$ 方式进行测量, 与测量结果 1 对应的投影算子是 $\Pi_1^{(2)}$, 与测量结果 2 对应的投影算子是 $\Pi_2^{(2)}$.

而且, 我们还可以设定, 测量是完全的, 即 $\Pi_1^{(i)} + \Pi_2^{(i)} = \mathbb{1}$, $i = 1, 2$, 这里 $\mathbb{1}$ 是描述该量子系统的 Hilbert 空间上的单位阵.

现在考虑测量结果的几率分布. 用 $\mathcal{M}_m$ 方式测量量子态 $|\psi_s\rangle$, 得到结果 r 的几率记作 $p_{r,s}^{(m)}$, 这里, $m, s, r \in \{1, 2\}$. 考察下面的几率表.

$\mathcal{M}_1$ 测量			$\mathcal{M}_2$ 测量		
	$|\psi_1\rangle$	$|\psi_2\rangle$		$|\psi_1\rangle$	$|\psi_2\rangle$
$\Pi_1^{(1)}$	1	0	$\Pi_1^{(2)}$	1	$\frac{1}{2}$
$\Pi_2^{(1)}$	0	1	$\Pi_2^{(2)}$	0	$\frac{1}{2}$

上表的左侧一栏描述的是用 $\mathcal{M}_1$ 方式测量两个不同的量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 得到的结果的几率分布. 例如, 用该种测量方式测量 $|\psi_1\rangle$, 得到结果 1 (对应于投影算子 $\Pi_1^{(1)}$) 的几率等于 1, 得到结果 2 (对应于投影算子 $\Pi_2^{(1)}$) 的几率等于 0, 即$p_{1,1}^{(1)} = 1$, $p_{2,1}^{(1)} = 0$. 而用同样的测量方式观测量子态 $|\psi_2\rangle$, 则得到结果 1 的几率是 0, 得到结果 2 的几率为 1, 即 $p_{1,2}^{(1)} = 0$, $p_{2,2}^{(1)} = 1$. 对上表右侧一栏有类似的解读.

第一个问题是: 如果这个量子系统是一个双值系统, 描述它的量子态的 Hilbert 空间是一个两维的复空间, 即 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, 那么我们能否得到上述几率表?

接着考虑三维复空间, 即 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$. 基向量设为 $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$. 再设 $|\psi_1\rangle = |0\rangle$, $|\psi_2\rangle = |1\rangle$. 为了得到几率表左侧一栏的几率分布, 我们令 $\mathcal{M}_1$ 测量方式的两个投影算子分别是

$$\Pi_1^{(1)} = |0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|, \quad \Pi_2^{(1)} = |1\rangle\langle 1|.$$

这里 $\Pi_1^{(1)}$ 是投影到两维子空间上的投影算子. 而且, 上面的两个投影算子满足 $\Pi_1^{(1)} + \Pi_2^{(1)} = \mathbb{1}_3$, 这里 $\mathbb{1}_3$ 是 3×3 的单位阵.

第二个问题是: 构造 $\mathcal{M}_2$ 测量方式中的两个投影算子 $\Pi_1^{(2)}$ 和 $\Pi_2^{(2)}$, 实现几率表右侧一栏中几率分布.

5. 自旋为 1 的粒子的自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 在 x, y, z 三个方向上的分量分别记作 S_x, S_y, S_z. 它们满足对易关系

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \tag{1}$$

以及循环置换的形式. 它们的矩阵形式是

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 S_z 具有对角形式, 可以说这是在 S_z 表象中的表示.

另一方面, 我们还可以把它们表示为

$$J_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

可以验证, (2) 中的表示也满足 (1) 式中的对易关系. 以下令 $\hbar = 1$.

我们的目的是, 找到一个酉变换 U, 使得 $US_kU^\dagger = J_k$, 其中 $k = x, y, z$. 为此, 我们可以先考虑 S_z 和 J_z 的本征向量, 分别记作 $|\zeta_i\rangle$ 和 $|\eta_j\rangle$, 这里的下标 $i, j \in \{-1, 0, +1\}$, 对应于 S_z 和 J_z 的本征值.

$$|\zeta_{+1}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\zeta_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\zeta_{-1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\eta_{+1}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\eta_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\eta_{-1}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

然后构造一个酉变换 V,

$$V = |\eta_{+1}\rangle\langle\zeta_{+1}| + |\eta_0\rangle\langle\zeta_0| + |\eta_{-1}\rangle\langle\zeta_{-1}|$$

容易验证, $VS_zV^\dagger = J_z$. 但是, 让 V 作用于 S_x 和 S_y 之后, 发现

$$VS_xV^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad VS_yV^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个结果与 J_x 和 J_y 还有很大差距. 于是考虑对 V 作一个修正, 令

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V.$$

计算后发现

$$WS_zW^\dagger = J_z,$$

$$WS_xW^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad WS_yW^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

至此, 变换后的非零矩阵元的位置与 J_x 和 J_y 是相同的了. 但是还需要进一步对 W 作修正才能达到我们的目的.

问题是: 基于上述分析, 写出酉变换 U 的形式.

6. 我们知道, 对于两个量子态 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$, 可以用 $|\langle\psi\,|\,\varphi\rangle|$ 衡量它们之间的重叠程度, 或者说相似程度. 推广到对量子态的变换, 例如酉变换, 我们有类似的说法. 设 U 和 V 是两个 $\mathbb{C}^2$ 空间上的酉变换. 这两个酉变换之间的相似程度可以用 $F(U,V)$ 衡量.

$$F(U,V)=\frac{1}{4}|\operatorname{Tr}(U^\dagger V)|^2=\frac{1}{4}|\operatorname{Tr}(V^\dagger U)|^2.$$

$|\langle\psi\,|\,\varphi\rangle|$ 与 $F(U,V)$ 之间的类似性体现在: 它们都用到内积形式, 前者涉及态矢量之间的内积, 而后者则涉及算子之间的内积. 容易看出, 当 $U=V$ 时, $F(U,U)=1$, 表明 U 与其自身的相似程度最大, 理应如此.

现在假设 U 和 V 有如下随时间变化的形式,

$$U(t)=\exp\left\{-i\frac{\omega_u t}{2}\sigma_u\right\},\quad V(t)=\exp\left\{-i\frac{\omega_v t}{2}\sigma_v\right\},$$

其中 ω_u 和 ω_v 为常数, $\sigma_u=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, $\sigma_v=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, 而 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量. 这时, 衡量两个酉变换的相似程度的 $F(U,V)$ 是时间的函数, 记作 $F(t)$.

第一个问题是: 写出 $F(t)$ 的具体形式, 分析说明这样一个事实: 当 $\omega_u\neq\omega_v$ 时, 一定存在某个时刻 τ, 使得 $F(\tau)=0$, 即, 在 τ 时刻两个酉变换 $U(\tau)$ 和 $V(\tau)$ 是完全不相似的, 换句话说, 它们是可以区分的.

另一方面, 我们可以考虑量子态随时间的演化. 设系统的初态是 $|\eta\rangle\in\mathbb{C}^2$, 分别在时间演化算子 $U(t)$ 和 $V(t)$ 的作用下,

$$|\eta\rangle\longrightarrow|\psi(t)\rangle=U(t)|\eta\rangle,\quad |\eta\rangle\longrightarrow|\varphi(t)\rangle=V(t)|\eta\rangle.$$

在 t 时刻, $|\psi(t)\rangle$ 和 $|\varphi(t)\rangle$ 之间的重叠程度是

$$f(t)=|\langle\varphi(t)\,|\,\psi(t)\rangle|=|\langle\eta|V(t)^\dagger U(t)|\eta\rangle|=\operatorname{Tr}\left[V^\dagger(t)U(t)\,\eta\right],$$

其中 $\eta=|\eta\rangle\langle\eta|$.

第二个问题是: 怎样的 $|\eta\rangle$ 可以使 $f(t)$ 达到最小值? 也就是说, 这样的 $|\eta\rangle$ 可以体现出在 t 时刻两个酉变换 $U(t)$ 和 $V(t)$ 的可区分性.

注 在 $f(t)$ 的表达式中出现了 $V^\dagger(t)U(t)$, 令 $W(t)=V(t)^\dagger U(t)$, 显然, $W(t)$ 也是酉矩阵. 于是可以暂时不考虑 $U(t)$ 和 $V(t)$ 的具体形式而仅仅关注 $W(t)$. 设 $W(t)$ 的本征方程是 $W(t)=w_0(t)|\omega_0\rangle\langle\omega_0|+w_1(t)|\omega_1\rangle\langle\omega_1|$, 即, $W(t)$ 的本征值是 $w_0(t)$ 和 $w_1(t)$, 相应的本征向量是 $|\omega_0\rangle$ 和 $|\omega_1\rangle$. 然后以 $|\omega_0\rangle$ 和 $|\omega_1\rangle$ 作为 $\mathbb{C}^2$ 空间的基向量考虑 $|\eta\rangle$ 的形式.