中国科学技术大学物理学院

2024-2025 学 年 第 二

学期考试试卷

☑A 卷　　☐B 卷

课程名称：恒星物理基础　　课程编号：022171.01

开课院系：天文学系　　考试形式：闭卷

姓　名：________________学　　号：________________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、（10分）请写出白矮星的质量-半径关系，并指出它的物理起源？

二、（20分）设氢主序星的中心核区物态是理想气体.氢原子核之间的聚变反应通过量子隧穿效应进行.量子隧穿效应允许能量低于势垒的粒子以一定概率穿越势垒，其核心是波函数的指数衰减特性。对于一维矩形势垒，透射系数（隧穿概率）P的近似表达式为：

$$P \approx e^{-2\kappa L},\quad \text{其中}\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\ .$$

上面的公式中，m为粒子的质量（如质子质量$m_p = 1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$）,$V_0$为势垒的高度，$E$为粒子的动能，$L$为势垒的宽度，$\hbar = 1.05\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$为约化普朗克常量.考虑两个氢核以一定的相对速度靠近，距离为r时，静电库仑斥力导致的库仑势垒为

$$V_c(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Z_1Z_2}{r}\ ,$$

其中对于两个氢核，$Z_1 = Z_2 = 1$.基本电荷单位$e = 1.60\times10^{-19}\mathrm{C}$,真空介电常数$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\mathrm{F/m}$.当两个氢核距离$r \approx 1\mathrm{fm} = 10^{-15}\mathrm{m}$时，势垒高度$V_0 \cong 0.3\mathrm{MeV}$.当$r < 1\mathrm{fm}$时，强核力出现并主导，形成深度约-50MeV的势阱.因此势垒形状为库仑势垒叠加强核力势阱，其有效宽度L定义为从经典转折点r_c（对应于$E = V_c(r_c)$的两原子核间距）到强核力作用边界（$r \approx 1\mathrm{fm}$）的距离.实验表明，当隧穿概率达到临界隧穿概率$P_c \approx 10^{-20}$时，聚变反应率显著，开始具有可观测效应.设氢主序星核区温度与太阳接近，$T_c \approx 1.5\times10^7\mathrm{K}$.玻尔兹曼常数$k = 1.38\times10^{-23}\mathrm{J/K}$.对于两体问题，$m$应该取为约化质量$\mu$.

（1）（10分）请尝试导出两个氢核的隧穿概率达到临界隧穿概率时，对应的最小穿透距离$r_{\min}$的表达式？

（2）（10分）分别考虑普通的氢-氢核聚变和氘-氚核聚变两种情形，计算对应的最小穿透距离的数值？

三、（10分）有一颗碳氧白矮星，质量$M = 0.6M_\odot$，半径$R = 0.012R_\odot$，比热$c_V = 1.2\times10^7\mathrm{J\cdot kg^{-1}K^{-1}}$.初始的表面温度$T_{s,0} = 15000\mathrm{K}$.简化假设白矮星的

（装订线内不要答题）

冷却仅通过表面的黑体辐射进行. 与太阳有关的常数为：$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}\text{kg}$，$R_{\odot} = 6.96 \times 10^{8}\text{m}$.

（1）请计算白矮星的热容量C的数值？

（2）若白矮星当前的热辐射光度$L = 10^{-3}L_{\odot}$，求表面温度降到$T_{s,final} = 5000\text{K}$所需的时间（以年为单位）？其中$L_{\odot} = 3.8 \times 10^{26}\text{W}$.

四、（15分）已知质量为M, 半径为R的球对称自引力天体的自引力势能为$\Omega_s = -\alpha\frac{GM^2}{R}$，其中$G$为引力常量，取$\alpha = 3/5$. 设该系统经历准静态绝热过程，绝热指数为$\gamma_a$. 该天体的总内能为$U$,忽略粒子间的相互作用势能，则总内能就是系统内部粒子的总热动能.

（1）由流体静力平衡方程出发，尝试证明该系统满足如下形式的维里定律：

$$3(\gamma_a - 1)U + \Omega_s = 0$$

（2）对于白矮星，请给出满足的维里定律的具体形式，并讨论其物理意义？

五、（20分）已知相对论性简并电子气体的简并压为$P_{\text{e,r-deg}} = \frac{\hbar c}{4\pi^2}(3\pi^2 n_e)^{4/3}$，其中$n_e$为电子数密度.（1）由流体静力平衡方程结合质量连续性方程，白矮星存在质量上限，即钱德拉极限，满足如下形式

$$M_{\text{ch}} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}\frac{1}{{m_p}^2}$$

（2）请计算M_{ch}的数值，要求以$M_{\odot}$为单位. 已知$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$，$c = 2.998 \times 10^{5}\text{km/s}$ ，$G = 6.6 \times 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$ ，$m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$ ，$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}\text{kg}$.

六、（25分）假设一颗类太阳主序星处于流体静力平衡状态，其物态方程可以简化为多方过程，即满足$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$. 已知太阳质量$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}\text{kg}$，太阳半径$R_{\odot} = 6.96 \times 10^{8}\text{m}$，中心密度$\rho_c = 1.62 \times 10^{5}\text{kg/m}^3$.（1）请写出描述恒星结构的Lane-Emden方程，并解释$\theta(\xi)$的边界条件及其物理意义.（2）请分析为何$n = 3$的多方球模型为何能近似描述完全对流的主序星（如低质量红矮星）？（3）请导出$n = 1.5$时Lane-Emden方程的中心到表面的积分尺度因子α的表达式？请进一步算出α的数值？已知$n = 1.5$的解在$\xi_1 \approx 3.65$处$\theta = 0$.（4）请利用多方球模型的标度律，证明恒星的质量和半径之间满足关系$\text{M} \propto K^n R^{\frac{3-n}{1-n}}$,要求导出比例系数.（5）假设太阳可以近似为$n = 3$的多方球，请计算其中心压强$P_c$的表达式和具体数值？（6）对比多方球模型与太阳的真实观测数据的差异，请指出两个导致多方球近似失效的物理因素，并说明其影响.