

中国科大物理学院天文学系

2022-2023学年第二学期期末试卷

A 卷 B 卷

课程名称：恒星物理基础

__ 课程编号：__022171.01

开课院系：22系

考试形式：闭卷

姓 名：_____ 学 号：_____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | |

一、(20分) (1) 某主序星的质量为 M ，半径为 R 。a)若其内部的气体密度为均匀的常量 ρ_0 ，请导出恒星的自引力势能 Ω_S 的表达式？取无穷远处为零势能面。b)若恒星内部的密度分布为 $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ ，其中 ρ_c 为常量， r 为距离中心点的径向距离，请导出恒星的自引力势能 Ω_S 的表达式？

(2) 设恒星内部的物态是单原子理想气体，热力学等效分子质量是 μm_H ，玻尔兹曼常数为 k 。内部的密度分布为 $\rho(r)$ ，温度分布为 $T(r)$ 。恒星的半径为 R 。请利用这些物理量导出恒星的总的内能 U 的表达式？只需要写出积分的式子即可。

(3) 设主序星的自引力势能 Ω_S 和体积 V （球状近似）是已知的，请利用上述物理量导出恒星内部的平均压强 $\langle P \rangle$ 的表达式？

二、(20分) 设恒星内部的气体是充分电离的离子和电子组成的混和理想气体。某主序星的化学丰度组成是已知的，即氢的丰度是 X ，氦的丰度是 Y ，比氦更重的其它元素的丰度是 Z 。同时近似假设，比氢更重的原子核拥有相等数量的质子和中子。即这些原子核的核电荷数 Z_i 是其质量数 A_i 的一半。请利用上述丰度的物理量导出恒星内部气体热力学等效分子量 μ 的表达式？

三、(20分) 请写出Lane-Emden方程的形式。然后分别在指数 $n = 1$ 和 $n = 2$ 两种情形下解析求解该方程？

四、(20分) (1) 某主序星内部气体为经典、非相对论理想气体状态，满足 $\beta = P_{\text{gas}}/P$ 。若 β 为常量，请证明关于系统总能量、自引力势能和气体内能之间的关系满足下面的公式：

$$E_{\text{tot}} = \frac{\beta}{2} \Omega_s = -\frac{\beta}{2-\beta} U$$

进一步，请分别具体讨论 $\beta \rightarrow 1$ 和 $\beta \rightarrow 0$ 时系统会发生什么情况？

(2) 请证明爱丁顿标准模型里的如下公式成立：

(装订线内不要答题)

$$P = \left(\frac{3\mathcal{R}^4}{a\mu^4} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \rho^{4/3}$$

(3) 设 K 为多方气体球物态方程的常系数. 请证明, 该系数适当条件下可以变化, 和 β 以及气体平均分子量之间满足以下关系:

$$K = \frac{2.67 \times 10^{15}}{\mu^{4/3}} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/3}$$

(4) 利用以上的结果, 以及 $n = 3$ 时多方气体球的质量可以由 K 决定, 请导出质量的具体表达式 $M = M(\beta, \mu)$?

五、(20分) (1) 请利用恒星结构方程组和理想气体物态方程导出恒星内部的对流稳定性条件? (2) 请具体比较、讨论对流稳定性条件和流体静力平衡条件哪个更容易被破坏?